CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours BCE : Epreuve de Mathématiques II
(option Scientifique)
Conception HEC Paris-ESCP : 29 avril 2021

Partie 1. Polynômes factoriels

On note F, l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels et, pour tout entier naturel r, on note F_r, le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à r.

On note U_k la fonction $x \longmapsto x^k$ avec la convention habituelle $x^0 = 1$, de telle sorte que la base canonique de F_r est notée $(U_0, U_1, \dots, U_r)$.

Soit r, un entier naturel. On considère une famille $(Q_0, Q_1, \dots, Q_r)$ de fonctions polynomiales de degrés respectifs $d_0, d_1, \dots, d_r$ avec $d_0 < d_1 < \cdots < d_r$.

On suppose qu'il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_r Q_r = 0$$

1. En considérant $m = \max\{k \in [\![0, r]\!] : \lambda_k \neq 0\}$, démontrer que l'hypothèse précédente est absurde. Qu'a-t-on ainsi démontré ?
2. A quelle condition la famille $(Q_0, Q_1, \dots, Q_r)$ est-elle une base de F_r ? (On précisera s'il s'agit d'une condition *nécessaire*, d'une condition *suffisante* ou d'une condition *nécessaire* et *suffisante*.)

Pour tout entier naturel r, le réel "x puissance r descendante" est noté $x^{\underline{r}}$ et défini par,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, x^{\underline{r}} = x(x-1) \times \dots \times (x - r + 1) = \prod_{k=0}^{r-1} (x - k)$$

avec la convention $x^{\underline{0}} = 1$. On pose alors

$$\forall\, r \in \mathbb{N}\,, V_r : x \longmapsto x^{\underline{r}}$$

Il est clair que V_r appartient à F.

3. Quelles sont les racines de V_r ?

4. Démontrer que la famille $(V_0, V_1, \dots, V_r)$ est une base de F_r.
5. Démontrer que, pour tout entier $r \geq 2$,

$$x^{\underline{r}} \underset{x\to+\infty}{=} x^r - \frac{r(r-1)}{2}\, x^{r-1} + o(\, x^{r-1})$$

(On pourra raisonner par récurrence sur r.)

Ici, l'entier $r \geq 1$ est fixé et on compare la famille $(V_k)_{0\leq k\leq r}$ à la base canonique $(U_k)_{0\leq k\leq r}$ de l'espace F_r des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à r.

6. Démontrer qu'il existe une unique famille $(\sigma(r,k))_{0\leq k\leq r}$ de nombres réels tels que

$$U_r = \sum_{k=0}^{r} \sigma(r,k)\, V_k$$

7. Établir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall\, r \in \mathbb{N}^*, \qquad & \sigma(r,0) = 0 \\ & \sigma(r,1) = \sigma(r,r) = 1 \\ & \sigma(r,r-1) = \frac{r(r-1)}{2} \\ \forall\, r \in [\![2,+\infty]\!], \qquad & \sigma(r,2) = 2^{r-1} - 1 \end{aligned}$$

8. Démontrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1,r]\!]$ on a :

$$\sigma(r+1,k) = \sigma(r,k-1) + k\sigma(r,k)$$

9. En déduire que $\sigma(r,k)$ est un entier naturel non nul pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1,r]\!]$.
10. Écrire un code `scilab` qui affiche (au moyen de la commande `disp`) les listes $(\sigma(r,k))_{1\leq k\leq r}$ pour r variant de 2 à 5.
On pourra utiliser la commande `ones(n,p)` qui retourne la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$dont tous les coefficients sont égaux à 1.
11. Démontrer que, pour tout entier naturel r, il existe une unique famille $(s(r,k))_{0\leq k\leq r}$ de nombres réels tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, x^{\underline{r}} = \sum_{k=0}^{r} s(r,k) x^k$$

12. Soit $r \in \mathbb{N}^*$**.** Démontrer que

$$\forall\, k \in [\![1,r]\!]\,, s(r+1,k) = s(r,k-1) - rs(r,k)$$

En déduire la valeur de $s(r,1)$.
13. Déduire de la question 12 que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, le signe de $s(r,k)$ est celui de $(-1)^{r+k}$.
14. Démontrer que $\sigma(r,r)s(r,r) = 1$ et que :

$$\forall\, \ell \in [\![0,r-1]\!]\,, \sum_{k=\ell}^{r} \sigma(r,k)\, s(k,\ell) = 0$$

15. Calculer $s(r,r)$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et $s(r,r-1)$ pour tout entier $r \geq 2$.

Partie 2. Quelques propriétés de la loi de Poisson

Sous réserve d'existence, on note respectivement $\mathbf{E}(A)$ et $\mathbf{V}(A)$, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire A et $\mathbf{Cov}(A, B)$, la covariance de deux variables aléatoires discrètes A et B. Dans cette partie, on note X, une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ qui suit la loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$.

Pour tout entier $r \geq 1$, on pose $X^{\underline{r}} = X(X-1) \times \cdots \times (X-r+1)$ avec la convention $X^{\underline{0}} = X^0 = 1$.

Avec la suite $(\sigma(r,k))_{0\leq k\leq r}$ définie à la question 6 et la suite $(s(r,k))_{0\leq k\leq r}$ r définie à la question 11**,** on a

$$\forall\, r \in [\![1, +\infty[\![\,, X^r = \sum_{k=0}^{r} \sigma(r,k)\, X^{\underline{k}} \quad \text{et} \quad X^{\underline{r}} = \sum_{k=0}^{r} s(r,k)\, X^k$$

On admet ces deux résultats sans démonstration.

16. Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{E}(X^2)$.
17. Exprimer X, X^2, X^3 et X^4 en fonction des variables aléatoires $X^{\underline{1}}, X^{\underline{2}}, X^{\underline{3}}$ *et* $X^{\underline{4}}$.
18. Démontrer que la variable aléatoire X admet des moments de tous ordres.
19. Justifier que, pour tout entier $r \geq 1$, la variable aléatoire $X^{\underline{r}}$ admet des moments de tous ordres.
20. Pour tout entier $r \geq 1$, exprimer $\mathbf{E}(X^{\underline{r}})$ en fonction de r et de θ.
21. Calculer $\mathbf{E}(X^3)$ et $\mathbf{E}(X^4)$ en fonction de θ.

Pour tout entier naturel k et pour tout réel $\theta > 0$, on pose

$$f(\theta, k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} \quad \text{et} \quad g(\theta, k) = \ln\big(f((\theta, k))\big)$$

22. Pour tout entier $k \geq 0$, calculer l'expression de la dérivée partielle $\partial_1(g)(\theta, k)$et exprimer la variable aléatoire $\partial_1(g)(\theta, X)$ en fonction de X et de θ.
23. Vérifier que $XX^{\underline{r}} = X^{\underline{r+1}} + rX^{\underline{r}}$ pour tout entier $r \geq 1$.
    En déduire que : $\mathbf{Cov}(X, X^{\underline{r}}) \ = \ r\theta^r$.
24. Calculer $\mathbf{Cov}(\partial_1(g)(\theta, X), X^{\underline{r}})$, et en déduire l'inégalité :
    $$\forall\, \theta > 0, \forall\, r \in \mathbb{N}^*, \mathbf{V}(X^{\underline{r}}) \geq r^2\theta^{2r-1}$$

Partie 3. Estimation ponctuelle de fonctions du paramètre $\boldsymbol{\theta}$

Le contexte et les notations sont ceux de la partie 2.

On suppose que le paramètre $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ est inconnu et on cherche ici à estimer $\varphi(\theta)$, où φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on considère dans toute cette partie un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui, comme X, suivent toutes la loi de Poisson de paramètre θ.

Pour tout $\theta > 0$ et pour tout$(k_1, .., k_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose :

$$F(\theta, k_1, .., k_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = k_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} f(\theta, k_i)$$

et

$$G(\theta, k_1, .., k_n) = \ln\big(F(\theta, k_1, .., k_n)\big)$$

25. Démontrer que les fonctions $\theta \longmapsto F(\theta, k_1, .., k_n)$ et $\theta \longmapsto G(\theta, k_1, .., k_n)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer les dérivées partielles $\partial_1(F)(\theta, k_1, .., k_n)$ et $\partial_1(G)(\theta, k_1, .., k_n)$.

Pour tout $\theta > 0$, on pose $Z_\theta = \partial_1(G), (\theta, X_1, \dots, X_n)$.

26. Démontrer que la variable aléatoire Z_θ est centrée et admet une variance strictement positive, notée $I(\theta)$, que l'on calculera.

On rappelle que : *s'il existe n séries absolument convergentes $\sum_{k_1 \in \mathbb{N}} v_{1,k_1}, \dots, \sum_{k_n \in \mathbb{N}} v_{n,k_n}$ telles* que

$$\forall\, (k_1, .., k_n) \in \mathbb{N}^n, |u_{k_1,\dots,k_n}| \leq |v_{1,k_1}| \times \dots \times |v_{n,k_n}|$$

alors la série $\sum u_{k_1,\dots,k_n}$ est dite <u>absolument convergente</u>. On admet que, dans ce cas, la somme

$$\sum_{(k_1,..,k_n) \in \mathbb{N}^n} u_{k_1 \dots, k_n}$$

est bien définie.

On rappelle l'énoncé de la Formule de transfert : *si la série $\sum u_\theta(k_1, .., k_n) F(\theta, k_1, .., k_n)$ est absolument convergente (au sens qui vient d'être rappelé), alors la variable aléatoire discrète $U_\theta = u_\theta(X_1, .., X_n)$ est d'espérance finie et*

$$\begin{aligned} E(U_\theta) &= \sum_{(k_1,..,k_n) \in \mathbb{N}^n} u_\theta(k_1, .., k_n) F(\theta, k_1, .., k_n) \\ &= \sum_{(k_1,..,k_n) \in \mathbb{N}^n} u_\theta(k_1, .., k_n) \mathbf{P}([X_1 = k_1] \cap \dots \cap [X_n = k_n]) \end{aligned}$$

Soit $t : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$, une application indépendante de θ. On peut alors considérer la variable aléatoire discrète

$T = t(X_1, \dots, X_n)$

comme un estimateur de $\varphi(\theta)$.

On dira que la variable aléatoire T est un <u>estimateur régulier</u> de $\varphi(\theta)$ lorsque les trois conditions suivantes (R_1), (R_2) et *(R_3) sont satisfaites.*

$$\mathbf{E}(T) = \varphi(\theta) \;\; (R_1)$$

$$\mathbf{V}(T) \text{ existe } (R_2)$$

$$\forall\, \theta > 0\,, \varphi'(\theta) = \sum_{(k_1,..,k_n) \in \mathbb{N}^n} t(k_1, .., k_n) \partial_1(F)(\theta, k_1, .., k_n) \; (R_3)$$

On notera que la condition (R_3) sous-entend que le second membre est la somme d'une série absolument convergente (au sens rappelé plus haut).

Dans les questions 27 et 28, on suppose que T est un estimateur régulier de $\varphi(\theta)$.

27. La variable aléatoire T est-elle un estimateur sans biais de $\varphi(\theta)$?
28. Pourquoi la condition (R_3) n'est-elle pas une conséquence directe de la condition (R_1)?

Soit T, un estimateur régulier du paramètre $\varphi(\theta)$.

29. Établir les égalités suivantes :
$$\forall\, \theta > 0\,, \varphi'(\theta) = \mathbf{E}(T \times Z_\theta) = \mathbf{Cov}(T, Z_\theta)$$
30. En déduire l'inégalité :
$$\forall\, \theta > 0\,, \mathbf{V}(T) \geq \frac{\left(\varphi'(\theta)\right)^2}{I(\theta)}$$
où $I(\theta)$ a été défini à la question 26.
31. On cherche à simuler un échantillon de N réalisations de Z_θ pour différents couples (n, θ).
32. Compléter le code `scilab` suivant en justifiant votre réponse.

```
function ech=Z_th(n, theta)
     X=grand(n,N,'poi',theta);
     ech = (sum(X, ) - n*theta)/theta
endfunction
```

On rappelle l'usage de la commande `sum` : pour un tableau $M = (M_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$, les deux instructions `sum(M,'r')` et `sum(M,'c')` retournent respectivement les tableaux
$$\left(\sum_{i=1}^{n} M_{i,j}\right)_{1\leq j\leq p} \text{ et } \left(\sum_{j=1}^{p} M_{i,j}\right)_{1\leq i\leq n}$$
de tailles (size) respectives $(1, p)$ et $(n, 1)$.
À l'aide de la commande `histplot`, on a tracé les histogrammes des échantillons obtenus pour les couples $(n, \theta) =$ (10,4), (20,4), (40,4) et (50,5).

33. À quels couples correspondent les figures suivantes ? (On pourra admettre que $I(\theta) = n/\theta$).

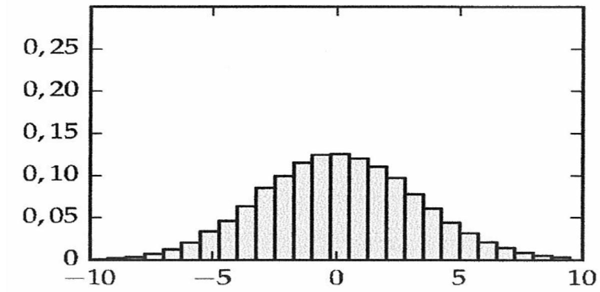

Figure A

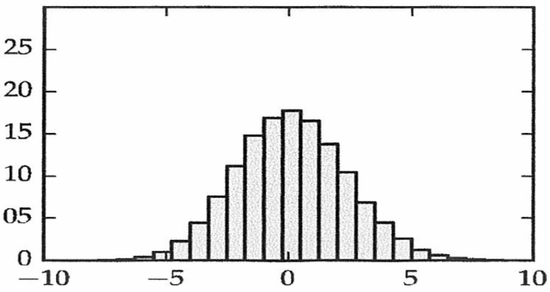

Figure B

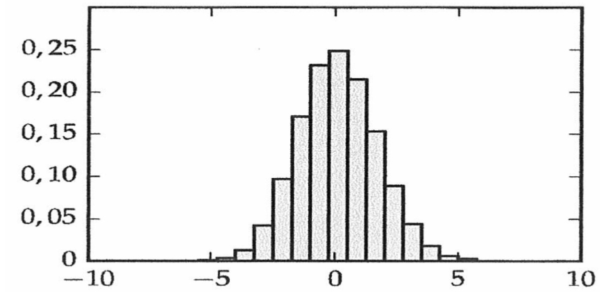

Figure C

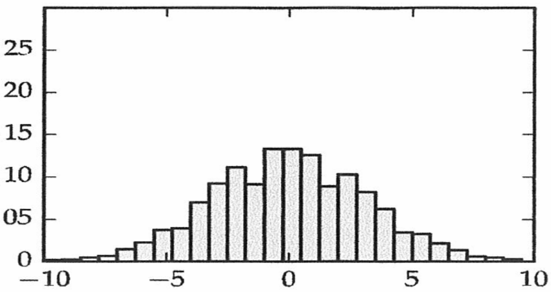

Figure D

Soit un entier $r \geq 1$. On suppose ici que $\varphi(\theta) = \theta^r$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose :

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \text{ et } M_{r,n} = \frac{S_n(S_n - 1) \times \cdots \times (S_n - r + 1)}{n^r}$$

34. Rappeler (sans démonstration) la loi de la variable aléatoire S_n ainsi que son espérance et sa variance.
35. Démontrer que $M_{r,n}$ est un estimateur régulier de θ^r.
    NB : Pour établir la propriété (R_3), on admettra que la série est absolument convergente.
    En déduire que :
    $$\forall\, \theta > 0\,, \mathbf{V}(M_{r,n}) \geq \frac{r^2\theta^{2r-1}}{n}$$
36. Dans cette question, on suppose que $r = 2$. Calculer la variance de $M_{2,n}$ et démontrer que la suite d'estimateurs de θ^2 $(M_{2,n})_{n\geq 1}$ est convergente.
37. Pour un entier $r \geq 1$ quelconque, la suite $(M_{r,n})_{n\geq 1}$ d'estimateurs de θ^r est-elle convergente ?
    (On pourra commencer par calculer, en fonction de l'entier $k \in \mathbb{N}^*$ un équivalent de $\mathbf{E}(S_n^k)$ lorsque n tend vers $+\infty$).

Partie 4. Le cas $\boldsymbol{\varphi}(\theta) = \theta$

Le contexte et les notations sont ceux des parties 2 et 3.
Dans cette partie, on compare deux estimateurs du paramètre inconnu θ.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

38. Démontrer que $\bar{X}_n$ est un estimateur régulier du paramètre θ.
39. Que devient l'inégalité de la question 30 ?

On dit qu'un estimateur régulier de θ est <u>efficace</u> lorsque sa variance est minimale parmi les estimateurs réguliers de θ.

Soit Y, un estimateur régulier de θ. Pour tout réel α on pose $\psi(\alpha) = \bar{X}_n + \alpha(Y - \bar{X}_n)$

40. Vérifier que $\psi(\alpha)$ est un estimateur régulier de θ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
41. En déduire que :

$$\mathbf{Cov}(\bar{X}_n, Y) = \frac{\theta}{n}$$

42. Exprimer $\mathbf{V}(Y - \bar{X}_n)$ en fonction de $\mathbf{V}(Y)$ et de $\mathbf{V}(\bar{X}_n)$. En déduire qu'un estimateur efficace de θ est presque sûrement unique.

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $W_n = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$

43. Exprimer W_n en fonction de $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ et de $\bar{X}_n^2$.
44. Démontrer que W_n est un estimateur sans biais de θ.
45. Démontrer que W_n admet une variance (qu'on ne cherchera pas à calculer).
46. Étudier la convergence des deux suites d'estimateurs $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$ et $(W_n)_{n\geq 2}$ du paramètre inconnu θ.

    On pourra démontrer que : si une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathbb{R}$ et si deux suites $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires convergent en probabilité vers les réels y et z respectivement, alors la suite de variables aléatoires $(a_n(Y_n - Z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers le réel $a(y - z)$.

47. On simule des échantillons de N réalisations des estimateurs $\bar{X}_n$, W_n et

$$W_n' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \text{ avec } \mathrm{n} = 50.$$

    En comparant les figures suivantes, relier chaque histogramme à l'estimateur qui lui correspond.

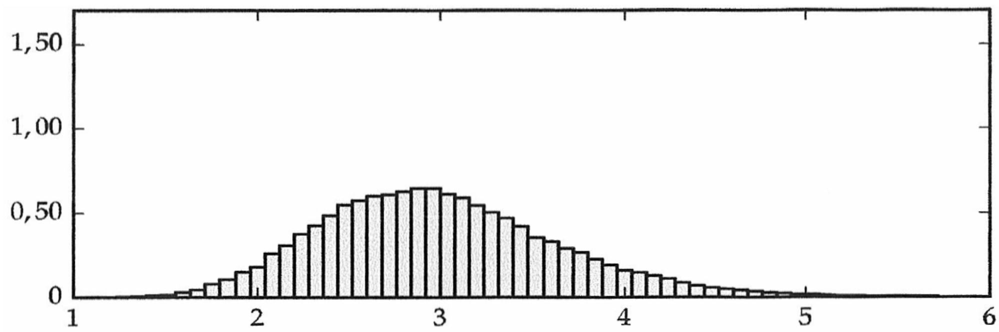

Figure E

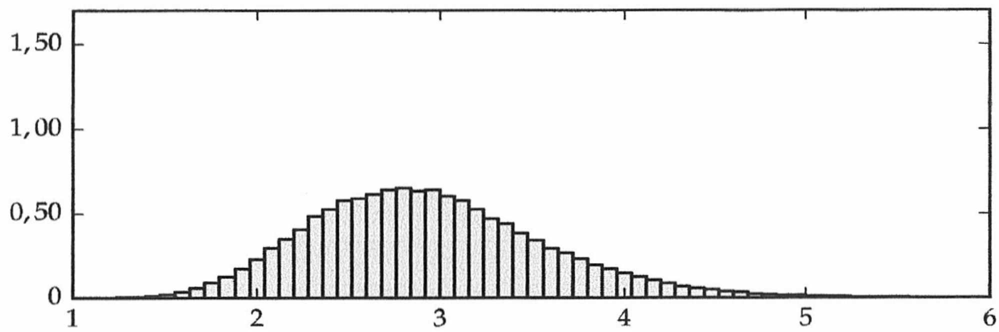

Figure F

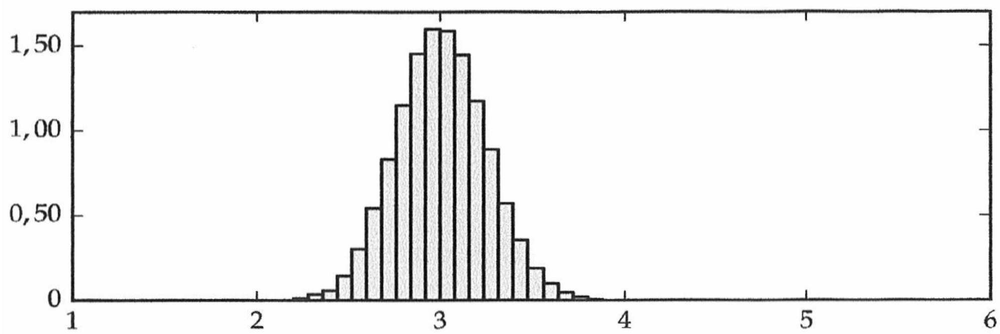

Figure G