



CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 🌐 www.ozanamlyon.fr

Concours BCE : Epreuve de Mathématiques II (option Scientifique) Conception HEC : 7 mai 2018

- On rappelle que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si le réel x est strictement supérieur à 1.
- On note ζ la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\forall x > 1, \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

on admet que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

- Toutes les variables aléatoires introduites dans le problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .
- Si R est un élément de la tribu \mathcal{A} , on note \bar{R} l'évènement contraire de R .

L'objet du problème est l'étude de la convergence de séries dont les termes sont des variables aléatoires. La convergence de telles séries, en loi ou en probabilité, est celle de la suite des sommes partielles associées.

Autrement dit, pour toute suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^}$, on dit que la série $\sum_{n \geq 1} U_n$ converge (en loi ou en probabilité) lorsque la suite de variables aléatoires*

$\left(\sum_{k=1}^n U_k \right)_{n \in \mathbb{N}^}$ converge (en loi ou en probabilité).*

Partie 1. Séries télescopiques

Dans cette partie, on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi qu'une variable aléatoire X de référence, et on étudie la convergence de la série aléatoire :*

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{X_n}{n} - \frac{X_{n+1}}{n+1} \right)$$

1. Justifier la convergence de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

2. Calculer la somme de cette série.

3. Dans cet exemple, quelle est la loi de la variable aléatoire de référence X ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{n+1} \text{ ou si } x > 1 \\ 1 + (n+1)x & \text{si } -\frac{1}{n+1} \leq x \leq 0 \\ c_n & \text{si } 0 < x < \frac{n}{n+1} \\ (n+1)(1-x) & \text{si } \frac{n}{n+1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

où c_n est une constante strictement positive.

4. Calculer la valeur de c_n et représenter graphiquement f_3 dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
5. Déterminer la fonction de répartition F_n de Y_n . La fonction F_n est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R} ?
6. Montrer que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

Dans les questions 7 à 10, on suppose que la variable aléatoire de référence X possède une densité f bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$D_n = X_1 - \frac{X_{n+1}}{n+1}$$

7. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{X_{n+1}}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.
8. En déduire que la suite de variables aléatoires $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X .
9. Justifier que la variable aléatoire D_n admet pour densité la fonction f_{D_n} telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{D_n}(x) = (n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f((n+1)(t-x)) dt$$

10. En déduire une nouvelle démonstration du résultat obtenu dans la question 6.

Dans les questions suivantes, on suppose que la variable aléatoire de référence X suit la loi normale centrée réduite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $U_n = \frac{X_n}{n} - \frac{X_{n+1}}{n+1}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n U_k$

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire U_n .

12. Justifier la convergence en loi de la série $\sum_{n \geq 1} U_n$.

Soit $(U'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, U'_n et U_n ont même loi.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T'_n = \sum_{k=1}^n U'_k$.

13. Justifier que la suite de variables aléatoires $(T'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée de variance $\frac{\pi^2}{3} - 1$.

14. Pourquoi ce résultat ne contredit-il pas ceux obtenus dans les questions 8 et 12 ?

Partie 2. Séries harmoniques « lacunaires »

Dans cette partie, on étudie des séries numériques obtenues à partir de la série harmonique divergente $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ par effacement de certains de ses termes.

Pour toute partie \mathcal{G} de \mathbb{N}^* , on note $\mathbb{1}_{\mathcal{G}}$ la fonction indicatrice de \mathcal{G} , c'est-à-dire la fonction définie sur \mathbb{N}^* à valeurs dans $\{0,1\}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{1}_{\mathcal{G}}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in \mathcal{G} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose :

$$\forall \mathcal{G} \subset \mathbb{N}^*, h_n(\mathcal{G}) = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{G}}(k)}{k}$$

Dans les questions 15 à 18 on étudie deux cas de convergence et les questions 19 à 28 sont consacrées à un cas de divergence.

On pose : $\mathcal{D} = \{n^2; n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\mathcal{T} = \{n^3; n \in \mathbb{N}^*\}$.

15. Exprimer $h_n(\mathcal{D})$ à l'aide d'une somme partielle de la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

16. En déduire la convergence de la suite $(h_n(\mathcal{D}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et calculer la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(n)}{n}$$

17. Justifier que $\mathcal{D} \cap \mathcal{T}$ est l'ensemble des entiers m pour lesquels $m^{1/6} \in \mathbb{N}^*$.

Pour traiter cette question, on admet que la racine carrée d'un entier naturel qui n'appartient pas à \mathcal{D} est un nombre irrationnel, c'est-à-dire, un nombre qui ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux entiers.

18. Montrer que la suite $(h_n(\mathcal{D} \cup \mathcal{T}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et exprimer la

somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D} \cup \mathcal{T}}(n)}{n}$ à l'aide de certaines valeurs de la fonction ζ .

On note \mathcal{J} l'ensemble des entiers naturels impairs : $\mathcal{J} = \{2n - 1; n \in \mathbb{N}^*\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2t-1} \right) dt$$

19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir l'encadrement :

$$0 \leq u_n \leq \frac{2}{(2n-1)^2}$$

20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h_n(\mathcal{J}) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k + \int_1^{\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor} \frac{1}{2t-1} dt$$

21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'encadrement :

$$0 \leq \ln \left(\frac{1}{n} \left(2 \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1 \right) \right) \leq \frac{2}{n}$$

22. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

On pose : $\delta = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

23. Etablir l'égalité : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (h_n(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{n})) = \delta$.

24. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{1}{2n-1}$$

25. Justifier pour tout entier $n \geq 3$, l'encadrement :

$$-\frac{1}{n} \leq \delta - (h_n(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{n})) \leq \frac{1}{n-2}$$

La fonction Scilab suivante, dont le script est incomplet (ligne (6)), permet de donner une valeur approchée de δ en calculant successivement des valeurs $h_n(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{n})$ jusqu'à atteindre une précision donnée.

```
(1) fonction s=delta(eps)
(2) n=3;
(3) s=1+1/3-(log(3)/2);
(4) while 1/(n-2)>eps
(5) n=n+2;
(6) s=s+1/n+.....;
(7) end;
(8) endfunction
```

26. Quelles sont les valeurs de $h_n(\mathcal{J}) - \ln(\sqrt{n})$ affectées successivement à la variable s lorsqu'on applique cette fonction à $\text{eps}=0.2$?

27. Compléter la ligne (6).

28. Pour quelles raisons l'algorithme utilisé peut-il assurer une précision arbitraire au calcul de la valeur approchée de δ ?

Partie 3. Séries de Riemann alternées

Dans cette partie, on note $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur la paire $\{-1, +1\}$, i. e. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$

On suppose l'existence d'un réel $\alpha \geq 0$ et d'un réel $M > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|s_n| \leq Mn^\alpha$.
Soit β un réel tel que $\beta > \alpha$.

29. Montrer pour tout entier $n \geq 2$, l'égalité :

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^\beta} = \frac{s_n}{n^\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right)$$

30. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n^\beta}$ est convergente.

31. Justifier pour tout réel $x > 0$, la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

Soit s et t des réels strictement positifs et n un entier supérieur ou égal à 1.

32. Calculer l'espérance de la variable aléatoire e^{tS_n} .

33. En utilisant l'écriture de e^u ($u \in \mathbb{R}$) sous forme de somme d'une série, établir l'inégalité :

$$\frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

34. A l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que :

$$P([S_n > s]) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2} - ts\right)$$

35. Justifier l'inégalité :

$$P([|S_n| > s]) \leq 2 \exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right)$$

Pour tout réel $\alpha \geq 0$, on pose :

$$C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} [|S_k| > k^\alpha] \right)$$

36. Justifier que C_α est un élément de la tribu \mathcal{A} .

37. Montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors la série $\sum_{n \geq 1} P([|S_n| > n^\alpha])$ est convergente.

38. En déduire que pour tout réel $\alpha > \frac{1}{2}$, on a $P(C_\alpha) = 0$.

Dans les questions 34 à 42, on s'intéresse à la série aléatoire $\sum_{n \geq 1} \frac{X_n}{n}$.

On note C l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{X_n(\omega)}{n}$ converge et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$K_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k}$$

Soit K l'application définie sur Ω par :

$$K(\omega) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n(\omega) & \text{si } \omega \in C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet sans démonstration que C est un élément de la tribu \mathcal{A} et que K est une variable aléatoire.

39. En utilisant le résultat des questions 29 et 30, montrer que si α vérifie $0 \leq \alpha < 1$, alors on a : $\bar{C}_\alpha \subset C$.

40. A l'aide des résultats des questions 36 à 38, montrer que $P(C) = 1$.

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on considère l'événement $E(\varepsilon)$ défini par :

$$E(\varepsilon) = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} [|K - K_n| > \varepsilon] \right)$$

41. Montrer que $P(E(\varepsilon)) = 0$ et en déduire que la suite de variables aléatoires $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire K .

On admet sans démonstration que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge alors en loi vers K .

Dans les questions suivantes, on considère une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{k}$.

42. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'espérance et la variance de H_n et trouver leurs limites respectives lorsque n tend vers $+\infty$.

43. Montrer que, quel que soit le réel $r > 0$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P([H_n \leq r]) = 0$.

La fonction Scilab suivante, dont le script est incomplet (ligne (5)), permet d'effectuer p simulations de la variable aléatoire $H_n - h_n(J)$, où $h_n(J)$ a été définie dans la partie 2 (préambule et question 16).

```
(1) fonction y=simul(n,p)
(2) y=zeros(p,1);
```

```

(3) for i=1:p
(4) for k=1:n
(5) y(i,1)=y(i,1)+(grand(1,1,'bin',1,0.5)+.....)/k ;
(6) end;
(7) end;
(8) endfunction

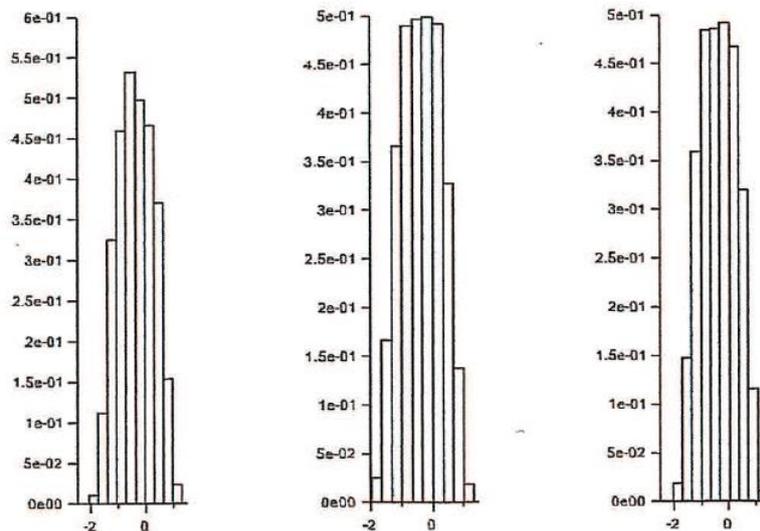
```

44. Compléter la ligne (5).

Les trois histogrammes suivants représentent la distribution simulée de la variable aléatoire $H_n - h_n(\mathcal{J})$ pour $n = 50, n = 100$ et $n = 200$.

45. Par quelles instructions ont-ils pu être obtenus ?

46. Pourquoi ces histogrammes suggèrent-ils une convergence en loi de la suite $(H_n - h_n(\mathcal{J}))_{n \in \mathbb{N}^*}$?



Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B'_n = \frac{1 + X_n}{2}$.

47. Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$\sum_{k=1}^n \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathcal{J}) = \frac{K_n}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k}$$

48. En déduire que la suite de variables aléatoires $(H_n - h_n(\mathcal{J}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de la forme $\lambda K + \mu$, où λ et μ sont des réels dont on précisera la valeur.