CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

www.ozanamlyon.fr

Concours ECRICOME : Epreuve de Mathématiques (option Scientifique) : 19 avril 2021

Exercice 1

Partie 1. Etude de trois matrices

On note A, J et S les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $A^3 = -3A$.
   En déduire que $S_p(A) = \{0\}$.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Justifier que J et S sont diagonalisables, et vérifier que $SJ = JS$.

On admet que $Sp(S) = \{0; \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

3. Montrer que tout vecteur propre de S est vecteur propre de J.
4. En déduire qu'il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (qu'on ne demande pas de déterminer) telle que $P^{-1}SP$ et $P^{-1}JP$ soient diagonales.

Partie 2. Etude des matrices magiques

Soit $n \geq 3$. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **magique** quand les sommes des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale sont égales. Ainsi en notant :

- $M = \left(m_{i,j}\right)_{1 \leq i \leq n}$
- pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $\ell_i(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$
- pour tout j de $[\![1, n]\!]$, $c_i(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}$
- $d_1(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} \ \ et \ d_2(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,n-i+1}$

alors :

M est magique si et seulement si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \ \ell_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M)$

Si M est une matrice magique, la valeur de ces sommes est alors notée $s(M)$ et appelée **somme** de ma matrice M.

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices réelles magiques d'ordre n, et **on admet que $\mathcal{E}_n$ ainsi défini est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

5. Montrer que ℓ_1 est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On admettra dans la suite que, pour tout i de $[\![2,n]\!]$ et pour tout j de $[\![1,n]\!]$, les applications ℓ_i, c_j, d_1, d_2 et s sont des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. On note $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des matrices $\mathcal{E}_n$ de somme nulle. Montrer que $\mathcal{K}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_n$.
7. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer que ${}^tM$ est aussi un élément de $\mathcal{E}_n$ et déterminer $s({}^tM\ )$.
8. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $M - \lambda J_n \in \mathcal{K}_n$, avec :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

9. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer que $W_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.

Partie 3. Etude du cas où $n = 3$

On se place dans cette partie dans le cas particulier où $n = 3$.

10. Vérifier que les matrices A, J et S définies dans la partie 1 sont magiques, et déterminer leur somme.
11. Montrer que pou toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(M_1, M_2) \in \left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\right)^2$ tel que :

$$M = M_1 + M_2 \text{ avec } \begin{cases} M_1 \text{ antisymétrique} \\ M_2 \text{ symétrique} \end{cases}$$

On explicitera notamment M_1 et M_2 en fonction de M.

Soit $M \in \mathcal{K}_3$. On écrit $M = M_1 + M_2$ selon la décomposition vue en question 11.

12. Montrer que M_1 et M_2 appartiennent à $\mathcal{K}_3$.
13. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$M_1 = \alpha A \quad \text{et} \quad M_2 = \beta S$$

14. En déduire une base de $\mathcal{K}_3$ puis montrer que (A, J, S) est une base de $\mathcal{E}_3$.

On note $\Delta = \{M \in \mathcal{E}_3 / P^{-1}MP \text{ est diagonale }\}$, où P est la matrice définie dans la partie 1.

www.ozanamlyon.fr

15. Montrer que $\Delta = \mathrm{Vect}(J, S)$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto (x^2+y)e^{-(x^2+y^2)} \end{array}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\partial_1 f(x,y)$ et $\partial_2 f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.

On **admettra** dans la suite que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- $\partial_{1,1}^2 f(x,y) = 2\left(\left(1-(x^2+y)\right)(1-2x^2) - 2x^2\right)e^{-(x^2+y^2)}$
- $\partial_{2,2}^2 f(x,y) = -2\left(x^2+2y+y\left(1-2y(x^2+y)\right)\right)e^{-(x^2+y^2)}$
- $\partial_{1,2}^2 f(x,y) = -2x\left(1+2y(1-x^2-y)\right)e^{-(x^2+y^2)}$

3. Montrer que la hessienne de f *en* $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est diagonale.

   La fonction f admet-elle un extremum local en $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$? Si oui, de quelle nature ?
4. Montrer que f admet un extremum local en $\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ et préciser sa nature.
5. Montrer que la hessienne de f en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ est la matrice $H = e^{-3/4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$.

   Justifier que H est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont toutes deux strictement négatives.

   Qu'en déduire pour le point $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$?
6. Montrer que :

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq |f(x,y)| \leq \left(\left(\max(|x|,|y|)\right)^2 + \max(|x|,|y|)\right)e^{-\left(\max(|x|,|y|)\right)^2}$$
7. En étudiant la limite en $+\infty$ de $u \longmapsto (u^2+u)e^{-u^2}$, montrer qu'il existe un réel r strictement positif tel que :

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \max(|x|,|y|) \geq r \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$$
8. Représenter l'ensemble $\mathcal{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \max(|x|,|y|) \leq r\}$ et justifier que cet ensemble est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
9. Vérifier que tous les points critiques de f appartiennent à $\mathcal{K}$.

   En déduire tous les extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ et les points où ils sont atteints.

www.ozanamlyon.fr

On cherche maintenant à étudier les extrema de la fonction f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$. On a représenté sur la figure 1 ci-dessous le champ de vecteurs correspondant au gradient de f (une flèche partant du point de coordonnées (x, y) représente le vecteur $\nabla f(x, y)$), ainsi que le cercle $\mathcal{C}$ d''équation $x^2 + y^2 = 1$.

10. En s'appuyant sur la figure 1, la fonction f semble-t-elle admettre un extremum sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$ au point de coordonnées $(1,0)$? Justifier votre réponse.
11. Déterminer sur $[-1, 1]$ les extrema de la fonction $g : y \longmapsto 1 + y - y^2$.
12. Déduire de la question précédente l'ensemble des points pour lesquels f admet un extremum sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$. Commenter ce résultat au vu de la figure 1.

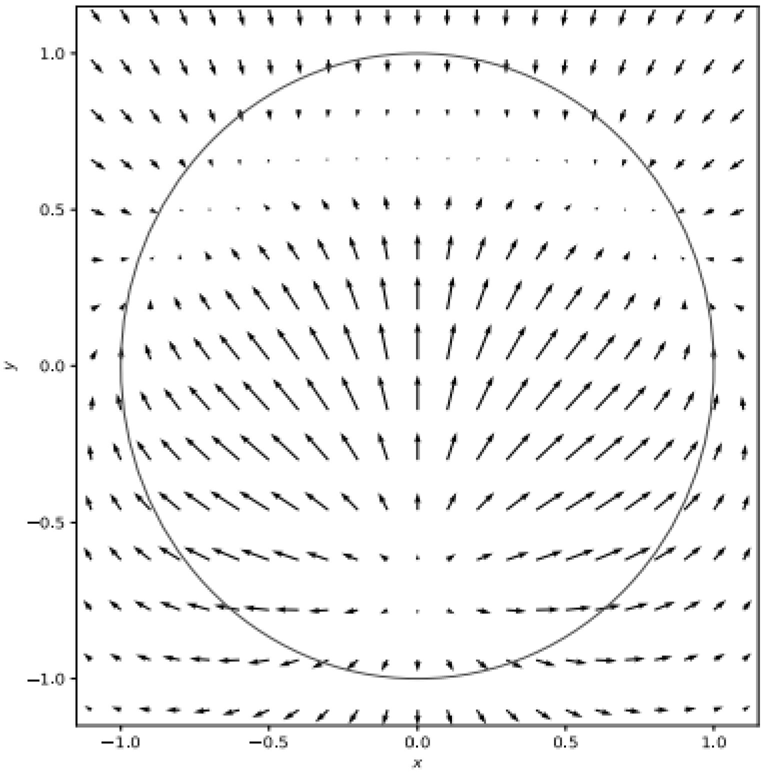

Figure 1. Gradient de f et cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$

Problème

Soit a un réel strictement positif.
On considère dans toute la suite du problème une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0, a]$. L'objectif de ce problème est d'étudier puis de comparer deux estimateurs de a.
Les parties 1 et 2 de ce problème sont indépendantes.

Partie 1. Estimateur du maximum de vraisemblance

On note pour tout $n \geq 1, V_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, *appelé estimateur de a du maximum de vraisemblance.*

On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `grand(n,m,'unf',a,b)` permet d'obtenir une matrice à n lignes et m colonnes, où chaque coefficient simule une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.

1. Ecrire une fonction d'en-tête `function V=sim_V(n,a)` prenant en entrée un entier naturel non nul n et un réel a strictement positif, et qui renvoie une réalisation de V_n.

On a tracé ci-dessous cinq réalisations mutuellement indépendantes de $(V_1, V_2, \dots, V_{100})$ dans le cas où $a = 1$.

2. A partir de ce graphique, que peut-on conjecturer sur l'estimateur V_n ?

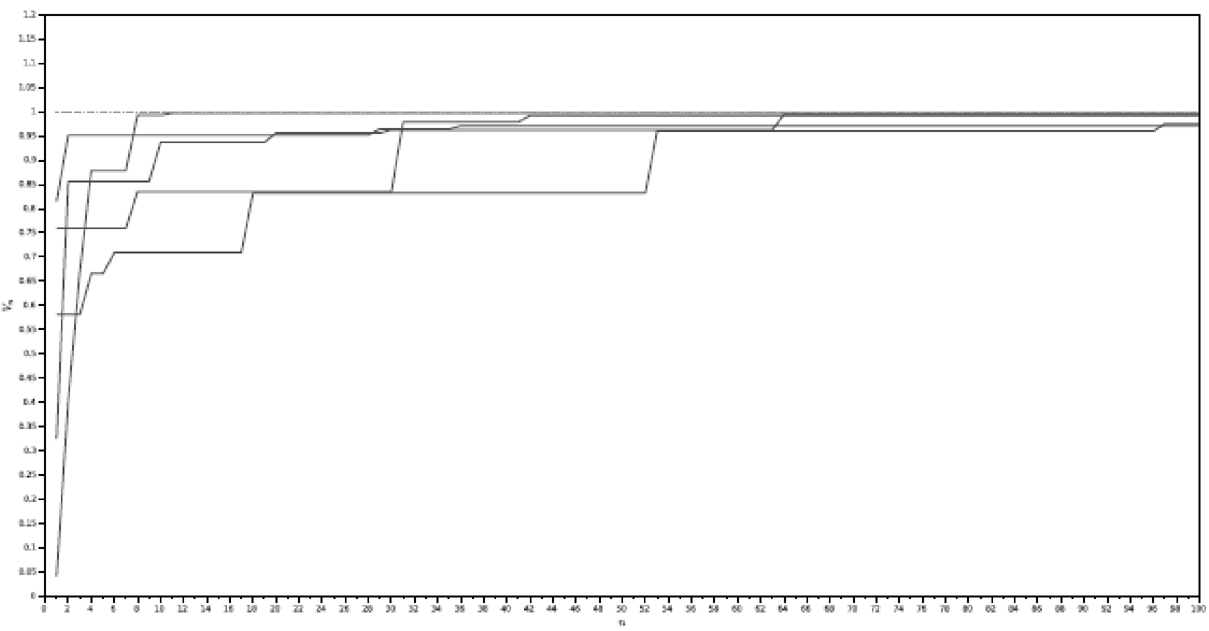

Figure 2. Cinq évolutions de $(V_1, V_2, \dots, V_{100})$ pour $a = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Rappeler l'expression de la fonction de répartition de X_1, suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0, a])$.
4. Déterminer la fonction de répartition F_n de V_n.
5. En déduire que $V_n$est une variable aléatoire à densité et donner une densité de V_n.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que V_n admet une espérance et déterminer l'espérance de V_n. L'estimateur V_n est-il sans biais ?
7. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\mathbb{P}(|V_n - a| \geq \varepsilon)$ en fonction de F_n, de a et de ε. L'estimateur V_n est-il convergent ?
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel t, exprimer $\mathbb{P}(n(a - V_n) \leq t)$ à l'aide de F_n.

9. En déduire que la suite $\left(n(a-V_n)\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on identifiera la loi et son(ses) paramètre(s).
10. Soit $\alpha \in]0,1[$. Déterminer à partir de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance $1-\alpha$ pour le paramètre a, construit à l'aide de V_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

11. Montrer que V_n admet un moment d'ordre 2, que l'on déterminera.
12. Montrer que le risque quadratique de V_n vaut :
$$\frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}.$$
Quel résultat précédemment établi cela permet-il de retrouver ?

Partie 2. Méthode des moments

Pour un entier $n \geq 1$, on note $\overline{X}_n$ la moyenne empirique de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$, c'est-à-dire
$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$
On note $M_n = 2\overline{X}_n$, appelé *estimateur de a par la méthode des moments.*

13. Ecrire une fonction d'en-tête `function y=sim_M(n,a)` qui, prenant en entrée un entier naturel non nul n et le réel $a > 0$, renvoie une réalisation de la variable aléatoire M_n.
14. Déterminer l'espérance et la variance de $\overline{X}_n$. En déduire que M_n est un estimateur sans biais.
15. Déterminer le risque quadratique de M_n. Cet estimateur est-il convergent ?
16. Justifier que la suite $\left(\sqrt{n}(M_n - a)\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi et le(s) paramètre(s).

Soit $\alpha \in]0,1[$.

17. Déduire de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance $1-\alpha$ pour le paramètre a, construit sur M_n .
Quel intervalle de confiance vous semble meilleur entre ce dernier et celui déterminé à la question 10 ?
18. Comparer le risque quadratique de M_n à celui de V_n, obtenu `a la question 12.
Commenter ce résultat `a l'aide de la figure 3 ci dessous :

www.ozanamlyon.fr

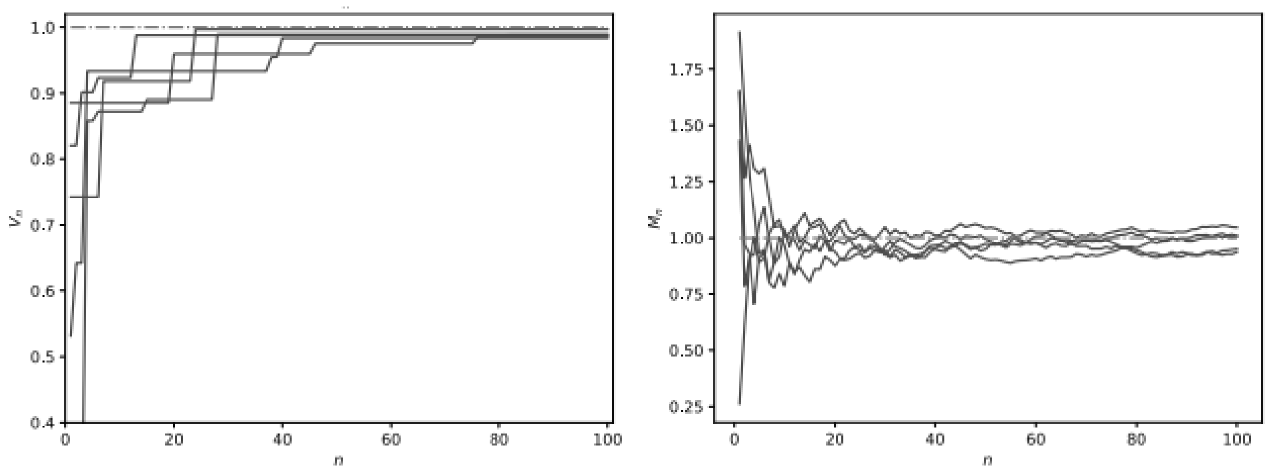

Figure 3. Cinq évolutions de $(V_1, V_2, \dots, V_{100})$ (à gauche) et de $(M_1, M_2, \dots, M_{100})$ (à droite) pour $a = 1$

Partie 3. Consistance de ces estimateurs

Dans les parties précédentes, nous avons montré que (V_n) convergeait « plus vite » vers a que (M_n) . Nous allons maintenant étudier la sensibilité de ces estimateurs à une perturbation, en supposant que la première mesure (X_1) est erronée.
Nous supposons donc toujours que les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes, mais nous supposons maintenant que :

- X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 2a]$
- si $i \geq 2$, X_i suit la loi uniforme sur $[0, a]$ (comme précédemment).

On considère toujours, pour tout entier $n \geq 1$:

$$V_n = \max(X_1, \dots, X_n) \text{ et } M_n = 2\overline{X}_n = \frac{2}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel t de $]a, 2a]$, montrer que :
$$\mathbb{P}(V_n \leq t) = \frac{t}{2a}$$
20. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition de V_n.
    La suite de variables aléatoires $(V_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle en loi ?
21. Calculer $\mathbb{P}\left(V_n > \frac{3}{2}a\right)$.
    L'estimateur V_n est-il toujours convergent ?

On pose pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $M'_n = \dfrac{2}{n-1}(X_2 + \cdots + X_n)$

On rappelle que la suite $(M'_n)_{n\geq 2}$ converge en probabilité vers a.

22. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, exprimer M_n en fonction de X_1, M'_n et n.
23. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
$$|M_n - a| \leq \frac{3a}{n} + |M'_n - a|$$

www.ozanamlyon.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit n_0 un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que $\dfrac{3a}{n_0} < \varepsilon$.

24. Pour tout entier n vérifiant $n \geq n_0$, comparer les événements :

$$[|M'_n - a| < \varepsilon\,] \text{ et } [|M_n - a| < 2\varepsilon\,]$$

25. La suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\geq 2}$ converge-t-elle en probabilité vers a ?
26. Commenter les résultats de cette partie à partir des parties précédentes.

www.ozanamlyon.fr