CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours ECRICOME : Epreuve de Mathématiques (option Scientifique) : 16 avril 2018

Exercice 1

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique.

Pour toutes matrices colonnes X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$.

Pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\|X\| = \sqrt{{}^tXX}$.

On considère u et v deux endomorphismes de E, et on note A et B leurs matrices respectives dans la base canonique de E.

Partie 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose dans cette partie uniquement que $n = 2$ et que les matrices de u et v dans la base canonique sont respectivement :

$$A = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que u et v sont des projecteurs.
2. Vérifier que les endomorphismes u, v et $u \circ v$ sont tous de rang 1.
3. Vérifier que le vecteur $x_0 = (1, a)$ est un vecteur propre de $u \circ v$.
4. Déterminer le spectre de $u \circ v$.
5. Montrer que les valeurs propres de $u \circ v$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$.
6. Pour quelle(s) valeur(s) de a, $u \circ v$ est-il un projecteur ?

Partie 2

On revient dans cette partie au cas général, ou n désigne un entier tel que $n \geq 2$.

On suppose que u et v sont des projecteurs symétriques de E et on pose : $C = BAB$.

7. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\|BX\|^2 = \langle BX, X\rangle$

8. En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\|BX\| \leq \|X\|$
9. Montrer que C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit λ une valeur propre de C et X un vecteur propre associé.

10. Exprimer $\|ABX\|^2$ en fonction de λ et $\|X\|$.
11. En déduire que les valeurs propres de C sont réelles positives.

Soit μ une (éventuelle) valeur propre de AB non nulle, et X un vecteur propre associé.

12. Montrer que BX est un vecteur propre de C. En déduire que μ est strictement positive.
13. Montrer que : $ABX = \mu AX$.
    En déduire que : $AX = X$.
14. Montrer que : $\langle X, BX \rangle = \mu \|X\|^2$.
15. Déduire des questions précédentes que le spectre de AB est inclus dans $[0, 1]$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

et on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6y$$

On pose enfin $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\varphi > 1$ et que les réels φ et $\frac{-1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation :
$$x^2 - x - 1 = 0$$
2. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que les seuls points critiques de f sont $(\varphi, \varphi + 1)$ et $\left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1}\right)$.
4. Etudier la nature des points critiques de f.
5. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
6. Recopier et compléter la fonction `Scilab` suivante afin que, prenant en argument un entier $n \geq 2$, elle calcule et renvoie la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

```
function u=suite(n)
     v=0
     w=1
     for k=2:n
        ...............
        ...............
        ...............
     end
     u=...............
endfunction
```

7. Justifier qu'il existe des réels λ et μ, que l'on déterminera, tels que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda\varphi^n + \mu\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n$$
8. En déduire que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$

9. Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général $\frac{1}{u_n u_{n+1}}$ converge.
10. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.
11. En utilisant le résultat de la question 5, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$$
12. Montrer que :
$$\varphi = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$$

Problème

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé note $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie 1. Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une **relation de Panjer** s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :
$$P(N = 0) \neq 1 \text{ et } \forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(N = k - 1)$$
On suppose dans les questions 1 à 3 que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.

1. Montrer que :
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, P(N = k) = \frac{b^k}{k!} P(N = 0)$$
2. Calculer :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k)$$
3. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b. Préciser son espérance et sa variance.

On suppose dans les questions 4 et 5 que $a < 0$ et que $b = -2a$.

4. Montrer que :

$$\forall\, k \geq 2, P(N = k) = 0$$

5. En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.

On suppose dans les questions 6 et 7 que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$et $p \in]0,1[$.

6. Montrer que :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], P(Z = k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times P(Z = k-1)$$

7. En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes en fonction de n et p.

On revient dans les questions ci-dessous au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1, b$ est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.

8. Calculer $P(N = 1)$. En déduire que $a + b \geq 0$.
9. Montrer que pour tout entier $m \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{m} kP(N = k) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)P(N = k) + b \sum_{k=0}^{m-1} P(N = k)$$

10. En déduire que $\left((1-a)\sum_{k=1}^{m} kP(N = k)\right)_{m\geq 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.
    Préciser alors la valeur de $E(N)$ en fonction de a et b.
11. Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et que :

$$E(N^2) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$$

12. En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $V(N)$ en fonction de a et b.
13. Montrer que $E(N) = V(N)$ si et seulement si N suit une loi de Poisson.

Partie 2. Fonction génératrice

On notera dans la suite : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ p_k = P(N = k),$ où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

14. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$, la série $\sum_{k\geq 0} p_k x^k$ est convergente

On appelle alors **fonction génératrice** de N la fonction G définie sur $[0, 1]$, par :

$$\forall\, x \in [0, 1], G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k)x^k$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\frac{b}{a} > 0$.

On pose : $\alpha = \frac{-(a+b)}{a}$.

On note enfin f la fonction définie par : $\forall\, x \in [0,1], f(x) = p_0(1-ax)^{\alpha}$

15. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, x \in [0,1], f^{(k)}(x) = k! \times p_k(1-ax)^{\alpha-k}$$

Soit $x \in [0,1]$.

16. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n dt$$

17. Vérifier que pour tout $t \in [0,x]$: $\frac{x-t}{1-at} \leq 1$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n dt \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-1} dt$$

18. En déduire que $G(x) = p_0(1-ax)^{\alpha}$

    En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier que $G'(1) = E(N)$.

Partie 3. Formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans les questions 8 à 13 de la partie 1. On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geq 1 \end{cases}$$

autrement dit :

$$\forall\, \omega \in \Omega, S(\omega) = 0 \text{ si } N(\omega) = 0 \text{ et } S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \text{ sinon}$$

19. Calculer $P(S=0)$ lorsque $a \in]0,1[$ à l'aide de la partie 2.
20. Calculer $P(S=0)$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

On considère la fonction `Scilab` suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```
function y=simulX(n)
     y=0;
     for i=1:n
          if rand()<1/2
```

```
                y=y+1;
            end
        end
    endfunction
```

21. Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser ses paramètres.

On rappelle qu'en `Scilab` l'instruction `grand(1,1,"poi",lambda)` renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `lambda`.
On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.

22. Recopier et compléter la fonction Scilab suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```
function s=simulS(lambda,n)
     N = grand(1,1,"poi", lambda)
     .......................
     .......................
     .......................
     .......................
     .......................
endfunction
```

Dans la suite du problème, on revient au cas général ou N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :

$$\forall\, k \geq 0, p_k = P(N = k)$$

et on notera également :

$$\forall\, k \geq 0, q_k = P(X_1 = k)$$

Enfin, on considère pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ en convenant qu'on a $S_0 = 0$.

23. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall\, i \in [\![1, n+1]\!], E(X_i | S_{n+1} = k) = \frac{k}{n+1}$$

$$\textit{Indication : on pourra considérer la somme } \sum_{i=1}^{n+1} E(X_i | S_{n+1} = k|)$$

24. Justifier que :

$$\forall\, j \in [\![0, k]\!], P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j) P(S_{n+1} = k) = q_j P(S_n = k - j)$$

25. Déduire des deux questions précédentes que :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j\, P(S_n = k - j) = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) P(S_{n+1} = k)$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

26. Montrer que :

$$\forall\, j \in [\![0, k]\!], P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n = k - j)$$

27. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j\, P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k)$$

28. Justifier que :

$$P(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k)$$

29. En déduire finalement que :

$$P(S = k) = \frac{1}{1 - aq_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j\, P(S = k - j)$$