CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours BCE : Epreuve de Mathématiques (option Scientifique)
Conception HEC, ESSEC BS : 30 avril 2019

Le problème comporte cinq parties.

Dans les trois premières parties, on étudie des propriétés usuelles des matrices ${}^tAA$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Dans la quatrième partie, on définit la racine carrée d'une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont strictement positives, afin d'obtenir une décomposition d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Dans la cinquième partie, on applique ce qui précède au calcul de la distance d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ à l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$.

Dans tout le problème :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on lui associe la matrice $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ de ses coordonnées dans la base B_0.
- $< \mid >$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et la norme euclidienne qui lui est associée est notée $\| \ \|$.
- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne sa transposée et $\operatorname{tr} A$ désigne sa trace.
- I_n désigne la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
- **Endomorphisme adjoint :** Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A, on note f^* l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice ${}^tA$.
  On notera aussi $s_f = f^* \circ f$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice ${}^tAA$.
- Si λ est un nombre réel, on définit :
  $$E_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) \text{ et } E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$$
- **Liste étendue des valeurs propres :** Lorsqu'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, on appelle liste étendue des valeurs propres de A, une liste de nombres

réels où chaque valeur propre λ de A se trouve répétée $\dim E_\lambda(A)$ fois. Par exemple, la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ admet $(1, 4, 4)$ pour liste étendue des valeurs propres.

- $S(\mathbb{R}^n)$(respectivement $S_n(\mathbb{R})$) désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$ (respectivement des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$).
- $S'(\mathbb{R}^n)$ (respectivement $S_n^+(\mathbb{R})$) désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$ (respectivement des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$) à valeurs propres positives ou nulles.
- On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$. Si $P \in M_n(\mathbb{R})$, on rappelle que P est une matrice orthogonale si P est inversible et si $P^{-1} = {}^tP$.
- **Matrices définies par bloc :** Considérons $r \in [\![1, n-1]\!]$ et $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ définies par :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

où

$$(A_1, B_1) \in \left(M_r(\mathbb{R})\right)^2 \; ; \; (A_4, B_4) \in \left(M_{n-r}(\mathbb{R})\right)^2$$

et

$$(A_2, B_2) \in \left(M_{r,n-r}(\mathbb{R})\right)^2 \; ; \; (A_3, B_3) \in \left(M_{n-r,r}(\mathbb{R})\right)^2$$

On utilisera sans démonstration les égalités suivantes :

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{bmatrix} \text{ et } {}^tA = \begin{bmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_3 \\ {}^tA_2 & {}^tA_4 \end{bmatrix}$$

Partie 1. Un premier exemple

Soit a un réel différent de 1 et : $A = \dfrac{1}{1-a}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

1. Quel est le rang de A ? Calculer A^2. Que peut-on dire de l'endomorphisme f canoniquement associé à A ? Est-ce un endomorphisme diagonalisable ? Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de f ?
2. Calculer $\mathrm{M} = {}^tAA$. La matrice M est-elle diagonalisable ? Comparer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(s_f)$. Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de s_f?
3. A quelle condition nécessaire et suffisante, M est-elle la matrice d'un projecteur ?

Partie 2. Généralités

Produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$

Soit $A = [a_{ij}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $B = [b_{ij}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

4. Donner l'expression de $\operatorname{tr}({}^tAB)$ en fonction des coefficients de A et de B.
5. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite du problème, on notera $(A \mid B) = \mathrm{tr}\,({}^tAB)$ et $\|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}\,({}^tAA)}$ la norme euclidienne associée.

6. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis vérifier que $\forall\, A \in M_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}\, A^2 \leq \mathrm{tr}\,({}^tAA)$. Montrer également que $\mathrm{tr}\, A^2 \leq \mathrm{tr}\,({}^tAA) \Leftrightarrow A \in S_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Caractérisation de la matrice f^* en base orthonormée

Soit $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on note P la matrice de passage de B_0 vers B'et A' la matrice de f dans la base B'.

7. Rappeler la relation liant A et A'.
8. Rappeler pourquoi P est une matrice orthogonale.
9. En déduire que ${}^tA'$ est la matrice de f^* dans la base B'.

Réduction de s_f

10. Vérifier que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX({}^tAA)X = \|AX\|^2$.
11. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}(s_f)$ et $\mathrm{rg}(s_f) = \mathrm{rg}\, f$.
12. Vérifier que s_f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$.
13. Montrer que les valeurs propres de s_f sont positives ou nulles.

On note $r = \mathrm{rg}\, f$ et on suppose pour les questions 14 et 15 que $1 \leq r \leq n-1$.

14. Justifier qu'il existe une base orthonormée $C = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice s_f est de la forme :
$$\begin{bmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$$
où D est une matrice diagonale d'ordre r dont les éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont strictement positifs et où $0_{r,n-r}, 0_{n-r,r}$ et $0_{n-r,n-r}$ sont des matrices dont tous les coefficients sont nuls.
15. Montrer que la matrice f de dans la base C est de la forme :
$$\mathrm{Mat}_C(f) = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$$
où $A_1 \in M_n(\mathbb{R})$ et $A_3 \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$.
16. Vérifier que ${}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 = D$.

Étude des valeurs propres de A^tA

On note $\tau_f = f \circ f^*$ l'endomorphisme canoniquement associé à A^tA.

17. Montrer que $\mathrm{rg}(s_f) = \mathrm{rg}(\tau_f)$ et $\dim\,(\mathrm{Ker}(s_f) = \dim\,(\mathrm{Ker}(\tau_f)$.

Soit λ une valeur propre strictement positive de s_f et x un vecteur propre associé.

18. Vérifier que λ est une valeur propre de τ_f et que $f(x)$ en est un vecteur propre associé.
19. Montrer alors que $\dim\,(E_\lambda(s_f)) \leq \dim\,(E_\lambda(\tau_f))$
20. Montrer que τ_f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, qu'il possède exactement les mêmes valeurs propres que s_f et que, pour chacune de ces valeurs propres λ, on a $\dim\left(E_\lambda(s_f)\right) = \dim\,(E_\lambda(\tau_f))$
21. En déduire enfin qu'il existe $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = \Omega({}^tAA){}^t\Omega$.

Une inégalité

Dans cette question, on note :
$V = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n\}$, $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n\}$ et φ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi :\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} x_i$$

On admet que V est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

22. Montrer que $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in V \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$.
23. En déduire que φ admet un maximum global noté M sur W.
24. Calculer $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ lorsque $(x_1, \dots, x_n) \in V \setminus U$.
25. En déduire que M est le maximum de φ sur U sous la contrainte $x_1 + \dots + x_n = 1$.
26. Déterminer alors la valeur du maximum M et préciser en quel vecteur U il est atteint.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de S sont positives ou nulles et on note $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ une liste étendue des valeurs propres de S.

27. Déduire de ce qui précède que :

$$\prod_{i=1}^{n} \mu_i \leq \left(\frac{\operatorname{tr} S}{n}\right)^n$$

Dans quel cas a-t-on égalité dans cette inégalité ?

Dans cette question, on note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une liste étendue des valeurs propres de ${}^tAA$. On définit l'application Δ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \Delta(x) = \prod_{i=1}^{n} (x + \lambda_i)$$

28. Montrer alors que pour tout réel $x \geq 0$,

$$\Delta(x) \leq \left(\frac{\mathrm{tr}(xI_n + {}^tAA)}{n}\right)^n = \left(\frac{nx + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{n}\right)^n$$

Partie 3. Étude de deux cas particuliers

Dans cette partie encore, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A.

On suppose dans les questions suivantes que f est un projecteur de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$.

29. Montrer que la trace de toute matrice représentant l'endomorphisme f est r.

On reprend les notations des questions 10 à 16 selon lesquelles :

$$\mathrm{Mat}_C(f) = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$$

30. Vérifier que $A_1^2 = A_1$ et que $\mathrm{tr}(A_1) = r$, et en déduire la matrice A_1.
31. Montrer alors que les valeurs propres non nulles de ${}^tAA$ sont supérieures ou égales à 1 et que $\mathrm{tr}({}^tAA) \geq r$.
32. Quels sont les projecteurs orthogonaux pour lesquels $\mathrm{tr}({}^tAA) = r$?

On suppose pour la fin de cette partie que f est une symétrie, c'est-à-dire $f^2 = \mathrm{Id}$.

33. Justifier que ${}^tAA$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et de ${}^tA$.
34. Montrer que si λ est une valeur propre de ${}^tAA$, alors $1/\lambda$ est aussi une valeur propre de ${}^tAA$ et que $\dim E_\lambda({}^tAA) = \dim E_{1/\lambda}({}^tAA)$.
35. Vérifier que pour tout réel strictement positif, on a : $x + \frac{1}{x} \geq 2$ puis établir l'équivalence logique : $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$

On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une liste étenduedes valeurs propres de ${}^tAA$.

36. Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i) \geq 2^n$$

37. Quelles sont les matrices pour lesquelles $\prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i) = 2^n$? Montrer que cette égalité correspond au cas où f est une symétrie orthogonale, ce qui signifie que les sous-espaces $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$ sont orthogonaux.

Partie 4. Décomposition polaire

Dans cette partie encore, $A \in M_n(\mathbb{R}), f$ est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A et on suppose de plus que A est inversible.

38. Montrer qu'il existe une base orthonormée $C = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et n réels strictement positifs $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, tels que $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.

On pose alors $\forall\, i \in [\![1,n]\!], v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\varepsilon_i$.

39. Montrer que l'on définit alors un endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$.

Soit un w un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $w \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $w^2 = s_f$.

40. Montrer que, pour toute valeur propre μ de w, on a $\mathrm{E}_\mu(w) \subset \mathrm{E}_{\mu^2}(s_f)$, et montrer ensuite que : $E_\mu(w) = E_{\mu^2}(s_f)$ et $\mathrm{Sp}(w) = \left\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in Sp(s_f)\right\}$
41. En déduire qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$ et que, dans toute base orthonormée de vecteurs propres de s_f, la matrice v est diagonale.
42. En déduire qu'il existe une unique matrice notée $\sqrt{{}^tAA}$ appartenant à $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $(\sqrt{{}^tAA})^2 = {}^tAA$.
43. Vérifier que la matrice $A(\sqrt{{}^tAA})^{-1}$ est orthogonale. Montrer alors qu'il existe un unique couple $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = \Omega S$. C'est ce que l'on appelle la décomposition polaire de A.

Partie 5. Application à la distance d'une matrice inversible à l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, A est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On note $d(M)$ la distance de M à $O_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $d(M) = \inf\limits_{V \in O_n(\mathbb{R})} \|M - V\|_2$

44. Justifier que $d(M)$ est bien définie.
45. Soit $R \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall\, N \in M_n(\mathbb{R}), \|RN\|_2 = \|NR\|_2 = \|N\|_2$
46. Montrer que les applications $V \mapsto VR^{-1}$ et $V \mapsto R^{-1}V$ sont des bijections de $O_n(\mathbb{R})$ sur lui-même.
47. En déduire que $d(M) = d(RM) = d(MR)$

On note $A = \Omega S$ la décomposition polaire de A. On considère une matrice diagonale D à éléments diagonaux strictement positifs et une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PD\,{}^tP$.

48. Vérifier que $d(A) = d(D)$.

Soit $V \in O_n(\mathbb{R})$. On note $W = \dfrac{1}{2}(V + {}^tV)$ et v l'endomorphisme canoniquement associé à V.

49. Justifier que W est diagonalisable. On note w l'endomorphisme canoniquement associé à W.
50. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $\langle w(x) \mid x\rangle = \langle v(x) \mid x\rangle$ et que $\|v(x)\| = \|x\|$. En déduire que : $|\langle w(x)|x\rangle| \leq \|x\|^2$ et $\langle x - w(x) \mid x\rangle \geq 0$

51. Montrer alors que les valeurs propres $I_n - W$ de sont positives ou nulles.

52. On note $W = \left[w_{ij}\right]_{(i,j)\in [1,n]^2}$. Montrer ainsi que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $1 - w_{ii} \geq 0$.

53. Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$, on a $w_{ii} = 1$ si, et seulement si, $W = I_n$.

On conserve les notations établies à partir des questions 47 à 53.

54. Montrer que $\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2(I_n - V \mid D) = 2(I_n - W \mid D)$

55. En déduire que $\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 \geq 0$

56. Montrer alors que $d(A) = \|D - I_n\|_2 = \left\|\sqrt{{}^tAA} - I_n\right\|_2$ et montrer ainsi que I_n est l'unique élément V de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $d(A) = \|D - V\|_2$.