Concours BCE : Epreuve de Mathématiques (option Scientifique)
Conception HEC : 30 avril 2018

Hormis le résultat de la question 31, la partie 4 est indépendante du préliminaire et des parties 1, 2 et 3.

Préliminaire

1. Établir pour tout entier naturel k, la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2}\, dt$

On pose alors $A_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ et, pour tout entier $k \geq 1, A_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2}\, dt$.

2. Calculer A_0, A_1, et A_2.
3. Déduire de la question 1 la convergence, pour tout x réel, des deux intégrales :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt \text{ et } \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \sin(2xt) dt$$

Partie 1. Calcul d'une fonction auxiliaire

On note F et G respectivement, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt)\, dt \text{ et } G(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \sin(2xt) dt$$

Dans cette partie, on veut montrer d'une part, que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'autre part, donner pour tout réel x, l'expression de $F(x)$.

4. À l'aide d'une formule de Taylor, établir pour tout réel u, l'inégalité : $|\sin(u)| \leq |u|$.
5. Pour tous réels u et v, justifier la formule trigonométrique :

$$\cos(u) - \cos(v) = 2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{v-u}{2}\right)$$

6. En déduire que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
7. Pour tout réel u, justifier à l'aide d'une formule de Taylor, l'inégalité :

$$|u - sin(u)| \leq \frac{u^2}{2}$$

8. Pour tous réels x et h, établir l'inégalité :

$$|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\left(|(2ht - \sin(2ht))\sin(2xt)| + (1-\cos(2ht))|\cos(2xt)|\right)dt$$

(On pourra admettre l'existence de l'intégrale du second membre, qui découle du préliminaire)

9. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall\,(x,h) \in \mathbb{R}^2, |F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \leq Ch^2$$

10. Justifier que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa fonction F' à l'aide de la fonction G.
11. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout réel x, on a :

$$F'(x) = -\,2xF(x)$$

12. En déduire que pour tout réel x, on a :

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$$

Partie 2. Fonction de Dirichlet

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit φ_n la fonction définie sur $D = \mathbb{R}\backslash\{2k\pi\,;\,k \in \mathbb{Z}\}$ par :

$$\forall\, u \in D, \varphi_n(u) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

(L'ensemble D est l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des multiples de 2π)

13. Montrer que la fonction φ_n est continue sur D et prolongeable par continuité en 0.
14. En déduire que la fonction φ_n admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$. On note encore φ_n la fonction ainsi prolongée sur $\mathbb{R}$.

15. Montrer que la fonction φ_n est paire.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

16. Pour tout réel u, calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} e^{iku}$
17. En déduire la relation $\forall\, u \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}$$

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u$$

Soit ψ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.

19. Établir pour tout réel x, l'égalité :

$$\int_x^{x+T} \psi(u)du = \int_0^T \psi(u)du$$

Partie 3. Formule sommatoire de Poisson

Dans cette partie, on note θ *un réel strictement positif fixé et on considère la fonction f définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs réelles telle que* : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-\theta x^2}$.

20. Montrer que pour tout réel x, les deux séries $\sum_{k\geq 1} f(x+2k\pi)$ et $\sum_{k\geq 1} f(x-2k\pi)$ sont convergentes.

On pose alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, H(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x+2k\pi) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x-2k\pi)$$

On définit ainsi une fonction H *sur* $\mathbb{R}$ *et on admet sans démonstration dans toute la suite du problème que la fonction* H *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$.

21. Préciser la parité de la fonction H et de sa fonction dérivée H'.

Dans les questions 22 à 25, on note n un entier naturel **fixé**.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, soit H_N la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, H_N(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{N} f\,(x+2k\,\pi) + \sum_{k=1}^{N} f\,(x-2k\,\pi)$$

22. Établir l'égalité :

$$\int_0^{2\pi} H_N(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-2N\pi}^{2(N+1)\pi} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u$$

23. En déduire que l'on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} H_N(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u$$

24. Établir pour tout réel x, l'inégalité :

$$|H(x) - H_N(x)| \leq 2 \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-4\theta\pi^2k^2}$$

25. En déduire les égalités :

$$\int_0^{2\pi} H(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \times \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right)$$

Soit x un réel appartenant au segment $[0,2\pi]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \int_0^{2\pi} H(x)\cos(nx)\,dx$

26. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, établir l'égalité :

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} H(u) \times \varphi_N(u+x)\,du + \int_0^{2\pi} H(u) \times \varphi_N(u-x)du$$

où la fonction φ_N a été définie dans la partie 2.

27. En déduire l'égalité :

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{H(v+x)+H(v-x)}{2\sin(v/2)}\right) \times \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)v\right)\mathrm{d}v$$

28. Justifier la continuité sur le segment $[0,2\pi]$ de la fonction K_x définie par :

$$K_x(v) = \begin{cases} \dfrac{H(v+x)+H(v-x)-2H(x)}{2\sin(v/2)} & \text{si } v \in]0,2\pi[\\ 0 & \text{si } v = 0 \text{ ou } v = 2\pi \end{cases}$$

29. À l'aide de la question 18, établir l'égalité :

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) - 2\pi H(x) = \int_0^{2\pi} K_x(v) \times \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)v\right)\mathrm{d}v$$

Soit g une fonction définie et de classe C^1 sur le segment $[0,1]$.

30. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\int_0^1 g(t)\sin(\lambda t)dt$ tend vers 0 lorsque le réel λ tend vers $+\infty$.

On *admet* plus généralement que si g est une fonction sur un segment $[\alpha,\beta]$ $(\alpha < \beta)$, alors :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_\alpha^\beta g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$$

31. Établir pour tout réel $x \in [0,2\pi]$ et pour tout réel $\theta > 0$, la relation (*formule sommatoire de Poisson*) :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right)\cos(nx)\right) = e^{-\theta x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\theta(x+2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\theta(x-2k\pi)^2}$$

Partie 4. Une application probabiliste de la formule sommatoire de Poisson

Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$.

Deux joueurs A et B lancent tour à tour une pièce de monnaie.

Le jet de la pièce donne « Pile » avec la probabilité p et « Face » avec la probabilité $1-p$.

Le vainqueur de la partie est le joueur qui obtient « Pile » le premier, auquel cas la partie s'arrête.
Le premier lancer (de rang 1) est effectué par le joueur A.
Si la partie ne s'arrête pas avant, les trois lancers suivants (de rangs 2, 3 et 4) sont effectués par le joueur B, les cinq suivants (de rangs 5, 6, 7, 8 et 9) par le joueur A, et ainsi de suite.
Après chaque changement de main, le joueur qui reprend la main peut ainsi effectuer (au maximum) deux lancers de plus que ceux que vient d'effectuer l'autre joueur.
On suppose que les résultats des lancers successifs sont indépendants.

32. Compléter la fonction `Scilab` suivante qui simule une partie effectuée selon les règles précédentes et affiche le vainqueur.

```
function v=jeu(p)
  i=1;
  v=1;
  s=1;
  j=1;
  while rand()> p
        i=i+1;
        j=j+1;
        if j>s then v=-v ; //changement de main
              s=...........;
              j=...........;
              end;
  end;
  if v==1 then disp("A vainqueur") ; else disp("B vainqueur") ;
  end;
endfunction
```

33. Que représente la valeur de i après l'exécution de la fonction « jeu » ?
34. Préciser la signification de la variable v.
35. Compléter le code de la fonction « jeu » pour qu'elle affiche le nombre de lancers effectués par le joueur A.
36. Écrire un code `Scilab` permettant d'obtenir une valeur approchée de la probabilité que le vainqueur du jeu soit le joueur A.

On suppose que l'expérience aléatoire précédente est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé (Ω, A, P_p).
On note :

- X le nombre de lancers effectués par le joueur A et I l'ensemble des rangs possibles de ses lancers 1, 5, 6,… ;
- Y le nombre de lancers effectués par le joueur B et J l'ensemble des rangs possibles de ses lancers 2, 3, 4,… ;
- H l'événement aléatoire « le vainqueur est A » ;
- K l'événement aléatoire « le vainqueur est B ».

37. Justifier que $P_p(H \cup K) = 1$ et identifier la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

38. Montrer que : $\lim\limits_{p \to 1} P_p(H) = 1$.

39. Justifier que l'ensemble I est inclus dans la réunion

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} [\![4n^2 + 1, 4n^2 + 4n + 1]\!]$$

40. Démontrer que :

$$P_p(H) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((1-p)^{4n^2} - (1-p)^{4n^2+4n+1} \right)$$

Donner une expression similaire pour $P_p(K)$.

41. En utilisant le résultat de la question 31, établir l'inégalité **stricte** suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (1-p)^{n^2} > \frac{1}{2}$$

42. Que peut-on en déduire concernant le jeu considéré ?