CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours BCE : Epreuve de Mathématiques (option Scientifique)
Conception ESSEC : 2 mai 2018

Notations et objectifs :

Lorsque r est un nombre réel strictement positif, on note :

$$A(r) = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que : } \forall\, k \in \mathbb{N}, \text{la série} \sum n^k |a_n| r^n \text{ converge}\right\}$$

$$\text{et } B(r) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\}$$

Et à toute suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $B(r)$ on associe, sous réserve d'existence, la fonction :

$$f_a : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

Dans la première partie, on étudie quelques propriétés des ensembles $A(r)$ et $B(r)$.

Dans la seconde, on étudie les propriétés de régularité des fonctions f_a.

Dans la troisième partie, on obtient, dans le cas où $r > 1$, sous certaines hypothèses, une formule de réciprocité donnant la suite a en fonction de la suite $\left(f_a{}^{(n)}(1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Enfin, dans la dernière partie, on utilise les résultats obtenus pour l'étude de variables aléatoires discrètes.

Partie 1. Premières propriétés et premiers exemples

Soit r un nombre réel strictement positif et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A(r)$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x de $[-r, r]$ et pour tout entier naturel k :
$$\text{la série} \sum n^k\, |a_n||x|^n \text{ converge.}$$
2. En déduire que, pour tout réel r' tel que $r \leq r'$, on a : $A(r') \subset A(r)$.
3. Vérifier également que : $0 < r \leq r' \Rightarrow B(r') \subset B(r)$ et $A(r) \subset B(r)$
4. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif $r, A(r)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

Exemples :

On souhaite montrer que, pour tout r réel strictement positif, la suite $\alpha = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$. Pour cela, on pose pour tout entier naturel k : $u_n(k) = \dfrac{n^{k+2}r^n}{n!}$

5. En considérant le quotient $\frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)}$, montrer que la suite $(u_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
6. Conclure alors :

$$\alpha = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A(r)$$

Pour λ réel strictement positif, on note $\beta(\lambda)$ la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Déterminer les réels strictement positifs r pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $B(r)$.
8. Déterminer ensuite les réels r strictement positifs pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $A(r)$.

Soit ρ un réel strictement positif et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(\rho)$.

9. Montrer que, pour tout réel r de $]0,\rho[$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $A(r)$.
   (On pourra penser à écrire : $n^k|a_n|r^n = |a_n|\rho^n n^k \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$)

Partie 2. Régularité de la fonction f_a

Dans cette partie R désigne un réel strictement positif et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(R)$.

10. Vérifier que :

$$f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \text{ est définie sur }]-R,R[\text{ (on pourra utiliser la question 9)}$$

Continuité de f_a

Soit r un réel de $]0,R[$, x dans $[-r,r]$ et h un réel tel que : $x+h \in [-r,r]$.

11. Montrer que, pour tout entier naturel n : $|(x+h)^n - x^n| \leq nr^{n-1}|h|$.
12. Justifier alors soigneusement que :

$$|f_a\,(x+h) - f_a(x)| \leq \frac{1}{r}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n\,|a_n|r^n\right)|h|$$

13. Montrer alors que f_a est continue sur $[-r,r]$ puis sur $]-R,R[$.

Caractère C^1 de f_a

On considère ici un réel r de $]0,R[$ et x dans $[-r,r]$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{et, sous réserve d'existence : } g_a : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Soit ρ dans $[r, R[$.

14. Justifier que la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $B(\rho)$, en déduire que g_a est définie et continue sur $]-R, R[$.
15. Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$S_n(x) = a_0 + \int_0^x S_n'(t)\,dt$$

16. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\left|\int_0^x (g_a(t) - S_n'(t))\,dt\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,|a_k| r^k$$

17. En déduire que :

$$f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t)dt$$

18. Montrer alors que f_a est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et que : $f_a' = g_a$.

Caractère C^∞ de f_a

Soit r de $]0, R[$.

19. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$ si et seulement si, pour tout k de $\mathbb{N}$,la série $\sum_{n\geq k}\binom{n}{k}|a_n| r^{n-k}$ converge.
20. Montrer que f_a est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et que, pour tout x de $]-R, R[$ et tout k de $\mathbb{N}$:

$$f_a^{(k)}(x) = k!\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k} a_n x^{n-k}\right)$$

21. Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de $f_a^{(n)}(0)$.

Exemples

On pose $\alpha = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f_\alpha : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

22. Donner une expression de $f_\alpha(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
23. Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $f_\alpha^{(k)}(1)$.

Soit λ un réel strictement positif, β la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f_\beta : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n x^n$

24. Donner une expression de $f_\beta(x)$ pour tout x de $\left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$.
25. En déduire que, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout x de $\left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$, la série $\sum_{n\geq k}\binom{n}{k}(\lambda x)^{n-k}$ converge et :

$$\sum_{n-k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k} = \frac{1}{(1-\lambda x)^{k+1}}$$

Partie 3. Une formule de réciprocité

Dans cette partie, ***R* désigne un réel strictement supérieur à 1** et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $B(R)$ telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\, a_n \geq 0$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note : $b_n = \frac{f_a^{(n)}(1)}{n!}$ et on fait l'hypothèse (H) qu'il existe un réel ρ strictement supérieur à 1 tel que la suite $(b_n \rho^n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Expression de a_0

26. Montrer que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, f_a(0) = \sum_{p=0}^{N} (-1)^p b_p + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)\, dt$$

27. Démontrer que :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)\, dt = 0$$

28. En déduire que la série $\sum_{p\geq 0} (-1)^p b_p$ converge et que :

$$a_0 = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p b_p$$

Généralisation : On considère ici un entier naturel s fixé.

29. Montrer que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, f_a^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^{N} (-1)^p \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!} + (-1)^{N+1} \int_o^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)\, dt$$

30. Vérifier que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \left| \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)\, dt \right| \leq \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!} \rho^{N+s+1} \frac{(N+s+1)!}{(N+1)} \frac{1}{\rho^{N+s+1}}$$

31. Déterminer :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)\, dt$$

32. Montrer alors que la série $\sum_{p\geq 0} (-1)^p \binom{p+s}{s} b_{p+s}$ converge et :

$$a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n$$

Cas particulier

On suppose dans ces questions que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs pour laquelle il existe un entier naturel d tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq d+1 \;\Rightarrow\; a_n = 0$.

33. Que peut-on dire de la fonction f_a ?
34. Montrer que la condition (H) est réalisée.
35. En déduire que, pour tout s de $[\![0, d]\!]$:

$$a_s = \sum_{n=s}^{d} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n$$

Parie 4. Applications aux variables aléatoires discrètes.

Dans cette partie, les variables aléatoires seront discrètes, définies sur un espace probabilisé (Ω, A, P), à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour une telle variable aléatoire X, on pourra utiliser, sans les rappeler, les notations suivantes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n = P(X=n), a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } G_X : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{, autrement dit : } G_X = f_a$$

Premiers résultats

36. Justifier que la suite a appartient à $B(1)$.
37. En déduire qu'il existe un réel R au moins égal à 1 tel que G_X soit définie et de classe C^∞ sur $]-R, R[$.

Premier exemple

On suppose tout d'abord que X suit une loi de Poisson de paramètre 1.

38. Déterminer la fonction G_X, vérifier qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout s de $\mathbb{N}$, Calculer $G_X^{(s)}(1)$.

On suppose maintenant que X est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P) telle que : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et vérifiant $G_X = f_a$ est définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout s de $\mathbb{N}$: $f_a^{(s)}(1) = 1$.

39. Justifier que l'hypothèse (H) de la partie 3 est réalisée et déterminer a_n pour tout n de $\mathbb{N}$.
40. Quelle est la loi de X ?

Deuxième exemple

On considère ici un réel p dans $]0,1[$ et on note $q = 1-p$. On suppose que $X+1$ suit une loi géométrique de paramètre p.

41. Déterminer la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis la fonction G_X.

42. Vérifier que G_X est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$.

43. Enfin, pour tout s de $\mathbb{N}$, calculer $G_X^{(s)}(1)$.

On suppose maintenant que $p > \dfrac{1}{2}$.

44. Vérifier que : $\frac{q}{p} < 1$.

On considère X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P) telle que : $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On suppose de plus que : $G_X = f_a$ est définie et de classe C^∞ sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, et que pour tout s de $\mathbb{N}$:

$$\frac{f_a^{(s)}(1)}{s!} = \left(\frac{q}{p}\right)^s$$

45. Justifier que l'hypothèse (H) de la partie 3 est réalisée et déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

46. Quelle est la loi de $X + 1$?

Cas où X est une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs

On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est inclus dans $[\![0, d]\!]$ où d est un entier de $\mathbb{N}^*$.
On note Pol_d le sous-espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à d. Pour s de $[\![0, d]\!]$, on note e_s la fonction $x \mapsto x^s$ et on rappelle que $(e_s)_{s\in[\![0,d]\!]}$ est une base de Pol_d.
On définit les fonctions de Pol_d :

$$H_0 : x \mapsto 1 \text{ et pour tout } s \text{ de } [\![1, d]\!],\ H_s : x \longmapsto \frac{x(x-1)\ldots(x-s+1)}{s!} = \frac{1}{s!}\prod_{k=0}^{s-1}(x-k)$$

47. Montrer que la famille $(H_s)_{s\in[\![0,d]\!]}$ est une base de Pol_d.

On note Δ défini sur Pol_d par : $\forall\, P \in Pol_d, \Delta(P) : x \mapsto P(x+1) - P(x)$

48. Vérifier que Δ est un endomorphisme de Pol_d.

49. Montrer que : $\Delta(H_0) = 0$ et encore : $\forall\, s \in [\![1, d]\!], \Delta(H_s) = H_{s-1}\ et\ H_s(0) = 0$.

50. Montrer que $\forall\, P \in Pol_d, \forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{s=0}^{d}\left[\left(\Delta^s(P)\right)(0)\right]H_s(x)$$

51. En déduire que, pour tout k de $[\![0, d]\!]$ et pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$n^k = \sum_{s=0}^{d}\left[\left(\Delta^s(e_k)\right)(0)\right]H_s(n)$$

52. Montrer alors que, pour tout k de $[\![0, d]\!]$, l'espérance de X^k est :

$$E(X^k) = \sum_{s=0}^{d} \left[\left(\Delta^s(e_k) \right)(0) \right] b_s \text{ où } b_s = \frac{f_a^{(s)}(1)}{s!}$$

Exemple : on suppose ici que : $d = 2, E(X) = 1$ et $E(X^2) = \frac{3}{2}$.

53. Déterminer b_0, b_1 et b_2, puis a_0, a_1 et a_2. Reconnaître la loi de X.