Concours BCE : Épreuve de Mathématiques (option Scientifique)

Conception EMLYON business school : 27 avril 2020

Problème 1

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}$$

Partie 1. Etude de la suite des racines des polynômes P_n

1. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les limites de P_n en $+\infty$ et en $-\infty$.
   En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme P_n admet au moins une racine réelle.
2. Montrer que:
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, P_n'(x) = -P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
   En déduire, que pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines de P_n sont toutes simples.
3. Verifier:
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right)$$
   En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines réelles de P_n appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1; 2n+1]$.
4. Montrer les relations:
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \begin{cases} P_{n+1}'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \\ P_{n+1}''(x) = P_n(x) \end{cases}$$
5. Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté u_n.

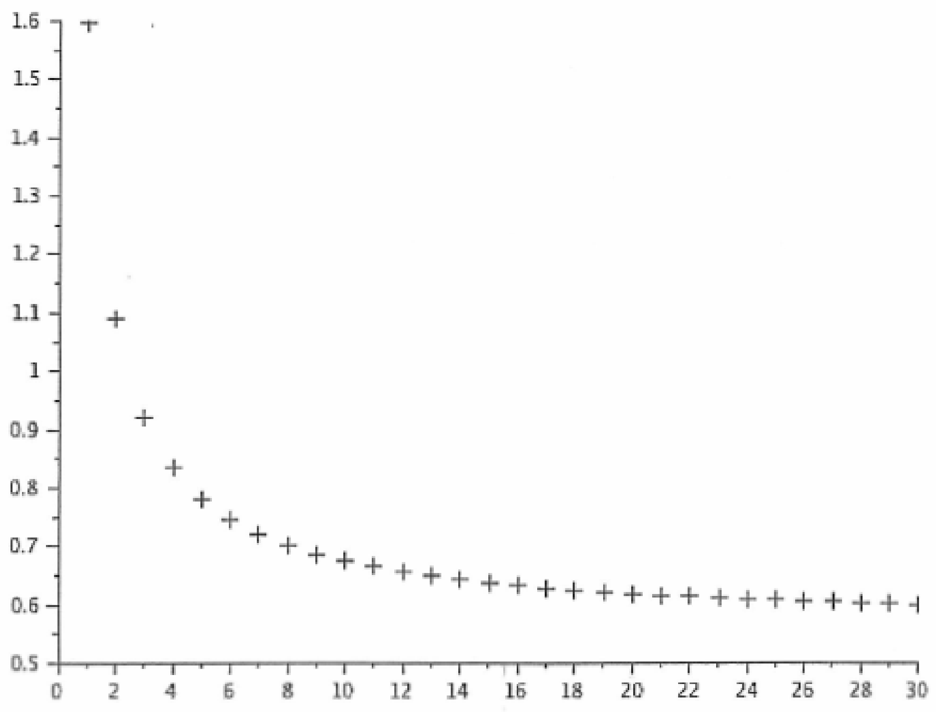
6. Écrire une fonction `Scilab`, d'en-tête `function y = P(n,x)` qui prend pour arguments un entier n de $\mathbb{N}$ et un réel x, qui renvoie la valeur de $P_n(x)$
   On rappelle qu'en langage `Scilab`, *l'instruction* `factoriale(k)` *renvoie une valeur de* k!

7. Recopier et compléter la fonction `Scilab` suivante afin que, prenant pour argument un entier n de $\mathbb{N}$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
function u = suite(n)
   a = .......
   b = .......
   c =(a+b)/2
   while .......
        if ....... then
             a = c
        else
             b = c
        end
        c = .......
   end
   .......
endfunction
```

On utilise la fonction précédente pour représenter les premiers termes de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

8. Conjecturer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ et la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.



9. Montrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(u_n) = \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right)$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

On suppose **dans les questions 10 à 12** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

10. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leq e^{\ell}|u_n - \ell|$.
11. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\ell)$. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u_n) = e^{-\ell}$.
12. Aboutir à une contradiction.
13. En déduire la nature et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie 2. Quelques résultats intermédiaires

Les questions de cette partie sont indépendantes entre elles et indépendantes de la partie 1.

On note f la fonction définie sur $]0,1]$ par : $\forall\, t \in]0,1], f(t) = -\ln(t)$.

14. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(t)\, dt$ converge et préciser sa valeur.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

15. Justifier pour tout k de de $[\![1\,; n-1]\!]$:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

En déduire :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt + \frac{\ln(n)}{n}$$

16. En déduire la limite de :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

17. Montrer finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = e^{-1}$$

On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall\, t \in]0;+\infty[\,, g(t) = t + \ln(t) + 1$.

18. Montrer qu'il existe un unique α appartenant à $]0;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et justifier $e^{-2} < \alpha < e^{-1}$.

Partie 3. Equivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

19. Montrer

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}\,, e^{-x} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt$$

20. Justifier

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

21. En déduire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}^+, P_n(x) \leq e^{-x} \leq P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Soit n un entier de $\mathbb{N}$.

22. Montrer :

$$P_{n+1}(u_n) \leq e^{-u_n} \leq \frac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

23. En utilisant le résultat de la question 3 et 9 obtenir :

$$\frac{2(u_n)^{2n}}{(2n+3)!} \leq e^{-U_n} \leq \frac{(u_n)^{2n}}{(2n)!}$$

puis :

$$(2n)! \leq (u_n)^{2n} e^{u_n} \leq \frac{(2n+3)!}{2}$$

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $w_n = \dfrac{u_n}{2n}$

24. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leq w_n e^{w_n} \leq \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}$$

En déduire que la suite $(g(w_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puis que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers α, la fonction g et le réel α étant définis dans la question 18.

25. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 2

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note $B_n = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie 1. Etude d'un produit scalaire

1. Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ converge.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

2. Pour tout k de $\mathbb{N}$, déterminer à l'aide d'une intégration par parties une relation entre les intégrales I_{k+1} et I_k.
3. En déduire : $\forall\, k \in \mathbb{N}, I_k = k!$

Pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}[X]^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.

4. Montrer que $\langle .\,, .\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Dans toute la suite du problème, on munit $\mathbb{R}[X]$ de ce produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

5. Calculer, pour tout (i, j) de $\mathbb{N}^2$, $\langle X^i, X^j\rangle$ et, pour tout i de $\mathbb{N}$, $\|X^i\|$.

On admet qu'il existe une unique suite de polynômes $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ défini par :

- Pour tout k de $\mathbb{N}$, le polynôme Q_k est de degré k et de coefficient dominant strictement positif,
- Pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $(Q_0, \dots, Q_k)$ est une famille orthonormale.

6. Déterminer Q_0 et Q_1 et vérifier que $Q_2 = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1$.
7. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $C_k = (Q_0, \dots, Q_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.

On définit la matrice $H_n = (h_{i,j})_{1\le i,j\le n+1}$ de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall\,(i, j) \in [\![1; n + 1]\!]^2, \qquad h_{i,j} = \langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle$$

On note également A_n la matrice de la famille $B_n = (1, X, \dots, X^n)$ dans la base C_n.

Etude du cas $n = 2$

8. Expliciter la matrice H_2.

   Montrer que la matrice H_2 est inversible et vérifier que $H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

9. Expliciter la matrice A_2 et calculer ${}^tA_2A_2$. Que remarque-t-on ?

On note, pour tout (i, j) de $[\![1; n + 1]\!]^2$, $a_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de la matrice A_n.

10. Justifier que la matrice A_n est inversible.
11. Justifier :

$$\forall\, j \in [\![1; n + 1]\!], X^{j-1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,j} Q_{k-1}$$

   En déduire :

$$\forall\,(i,j)\in [\![1;n+1]\!]^2, \langle X^{i-1},X^{j-1}\rangle = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i}a_{k,j}$$

12. Montrer alors la relation : $H_n = {}^tA_nA_n$.
13. Montrer que la matrice H_n est inversible.
14. Etablir (sans calcul) que la matrice H_n est diagonisable.
15. Montrer que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.
    (*On pourra calculer, pour tout vecteur propre de* Y *de* H_n, ${}^tYH_nY$)

Partie 2. Etude d'une projection

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. On définit la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} \langle P,1\rangle \\ \langle P,X\rangle \\ \vdots \\ \langle P,X^n\rangle \end{pmatrix} \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

Soit $\mathbb{R}$ un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On note $V = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $\mathbb{R}$ dans la base $\mathcal{B}_n$.

16. Montrer, pour tout i de $[\![0\,;n]\!]$:

$$\langle R,X^i\rangle = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \langle X^i,X^k\rangle$$

17. Montrer : R est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow \forall\, i\in[\![0\,;n]\!], \langle P,X^i\rangle = \langle R,X^i\rangle$.
    En déduire : R est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow V = H_n^{-1}U$.

Retour au cas $n=2$

18. Déterminer le projeté orthogonal du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

On souhaite retrouver le résultat précédent par une méthode différente.
On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, f(a,b,c) = \int_0^{+\infty} (a+bt+ct^2-t^3)^2 e^{-t}dt$$

19. Vérifier :
    $\forall\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, f(a,b,c) = a^2+2b^2+24c^2+2ab+4ac+12bc-12a-48b-240c+720$
20. Montrer que f admet un unique point critique (a_0,b_0,c_0) vérifiant : $H_2\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 120 \end{pmatrix}$
21. Montrer que la matrice hessienne de f au point(a_0,b_0,c_0) est la matrice $2H_2$.
22. En déduire que la fonction f admet au point(a_0,b_0,c_0) un minimum local.
23. Justifier : $\inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} f(a,b,c) = \inf\limits_{R\in\mathbb{R}_2[X]} \|X^3-R\|^2$

En déduire que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$ et que ce minimum est atteint en un unique point.

24. Retrouver alors l'expression du projeté orthogonal du polynôme X^3sur $\mathbb{R}_2[X]$.