CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours BCE : Epreuve de Mathématiques (option Scientifique)
Conception EMLYON business school : 29 avril 2019

Le sujet est constitué d'un unique problème composé de cinq parties, relativement indépendantes les unes des autres.

La partie 1 étudie des endomorphismes de polynômes. Cette partie est indépendante du reste du problème.

Les parties 2, 3 et 4 étudient un opérateur fonctionnel. Certains résultats de la partie 2 seront utilisés dans les parties 3 et 4.

Enfin, la partie 5 étudie un analogue discret de cet opérateur manipulant les notions de suites et de séries. Cette partie est aussi indépendante du reste du problème.

Partie 1. Etude d'endomorphisme de polynômes

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes (ou fonctions polynomiales) à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ sa base canonique.

Dans toute cette partie, a désigne un réel quelconque.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\Psi_a(P) = 2P + (X-a)P'$.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit également la fonction $\Phi_a(P)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)^2}\displaystyle\int_a^x (t-a)P(t)dt & \text{si } x \neq a \\ \dfrac{P(a)}{2} & \text{si } x = a \end{cases}$$

Enfin on définit, pour tout k de $[\![0;n]\!]$, le polynôme Q_k par : $Q_k = (X-a)^k$.

1. Montrer que l'application $\Psi_a : P \longmapsto \Psi_a(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice de Ψ_a dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que Ψ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.
4. Justifier que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. Calculer, pour tout k de $[\![0;n]\!]$, $\Psi_a(Q_k)$.
6. En déduire une base de chacun des sous-espaces propres de Ψ_a.
7. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\left((X-a)^2P(X)\right)'$ en fonction de $\Psi_a(P)$.
8. En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$: $\Phi_a\left(\Psi_a(P)\right) = P$.
9. En déduire que $\Phi_a : P \longmapsto \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.
10. Montrer que Φ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Partie 2. Etude d'une fonction définie par un intégrale

Dans la suite du problème, on fixe $a = 0$ et on prolonge l'application Φ_0 précédente à l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ que l'on note plus simplement Φ.

On considère f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit la fonction $\Phi(f)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)dt & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On pose, pour tout x *de* $\mathbb{R}$: $h(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$

11. Justifier que la fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h'(x)$.

12. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Justifier qu'il existe deux réels α_x et β_x appartenant à $[0;x]$ tels que :

$$f(\alpha_x)\int_0^x t\,dt \leq \int_0^x t\,f(t)dt \leq f(\beta_x)\int_0^x t\,dt$$

13. En déduire :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$$

14. Montrer que l'on a aussi :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$$

15. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ et que l'on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \left(\Phi(f)\right)'(x) = \frac{1}{x}\left(f(x) - 2\Phi(f)(x)\right)$$

16. Montrer que, si f est une fonction paire (respectivement impaire), alors $\Phi(f)$ est encore une fonction paire (respectivement impaire).
17. Montrer que, si f est une fonction positive, alors $\Phi(f)$ est encore une fonction positive.

On **admet** le résultat suivant : si $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, alors $\lim\limits_{+\infty}\big(\Phi(f)\big) = 0$

18. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(g)$ ou $g: x \mapsto f(x) - \ell$, montrer :

$$\text{si } \lim_{+\infty} f = \ell, \text{alors } \lim_{+\infty}\big(\Phi(f)\big) = \frac{\ell}{2}$$

19. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(h)$ ou $h : x \mapsto f(-x)$, montrer :

$$\text{si } \lim_{-\infty} f = \ell, \text{alors } \lim_{-\infty}\big(\Phi(f)\big) = \frac{\ell}{2}$$

Partie 3. Une application en probabilité

Dans cette partie, on pourra utiliser des résultats de la partie 2.

On considère F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

On pose $G = 2\,\Phi(F)$; ainsi, on a : $\forall\, x \in \mathbb{R}, G(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x tF(t)dt & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

20. Montrer : $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, 0 \leq G(x) \leq F(x)$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}^{-*}, 0 \leq F(x) \leq G(x)$
21. Justifier que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ et exprimer, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $G'(x)$ à l'aide de $x, F(x)$ et $G(x)$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} G'(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

22. Montrer que g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire V puis que G est la fonction de répartition de V.

On considère la fonction h_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2xe^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

23. Montrer que h_1 est une densité de probabilité.

Soit X_1 une variable aléatoire admettant h_1 pour densité.

24. Montrer que X_1 admet une espérance, notée $E(X_1)$, et que l'on a : $E(X_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

On note H_1 la fonction de répartition de X_1 et on pose $H_2 = 2\Phi(H_1)$.

25. Montrer :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, H_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{1 - e^{-x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

D'après la question 22, H_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité que l'on note X_2.

26. Déterminer une densité h_2 de X_2, puis montrer que X_2 admet une espérance (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Partie 4. Etude d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire

On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E_2 l'ensemble des fonctions f de E telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty}(f(x))^2dx$ converge.
Pour toute fonction f de E, on note toujours $\Phi(f)$ la fonction définie *dans cette partie* sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\, f(t)dt & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

27. Justifier : $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
28. En déduire que, pour toutes fonctions f et g de E_2 :

$$\text{l'intégrale} \int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ est absolument convergente}$$

29. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

On considère l'application $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ de $E_2 \times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, (f,g) \in E_2 \times E_2, \langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

30. Montrer que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E_2.

On munit E_2 de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.
Soit f une fonction de E_2.

On note, comme dans la partie 2, pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $h(x) = \displaystyle\int_0^x t\, f(t)dt$

31. Calculer les limites de :

$$x \longmapsto \frac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}dx \quad \text{et de} \quad x \longmapsto \frac{(h(x))^2}{x^3} \text{ en } 0$$

32. Montrer à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall\, X > 0, \int_0^X \frac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}dx = -\frac{1}{3}\frac{\big(h(X)\big)^2}{X^3} + \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)dx$$

Soit $X > 0$.

33. En étudiant le signe de la fonction polynomiale : $\lambda \longmapsto \int_0^X (\lambda f(x) + \Phi(f)(x))^2 dx$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)dx \leq \left(\int_0^X (f(x))^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2 dx\right)^{1/2}$$

34. En déduire :

$$\forall\, X > 0, \left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2 dx\right)^{1/2} \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^X (f(x))^2 dx\right)^{1/2}$$

35. Montrer alors que la fonction $\Phi(f)$ appartient à E_2 et que l'on a : $\|\Phi(f)\| \leq \frac{2}{3}\|f\|$.
36. En utilisant la relation de la question 32, justifier que la limite de $X \longmapsto X(\Phi(f)(X))^2$ en $+\infty$ est finie, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.
37. En déduire : $\|\Phi(f)\|^2 = \frac{2}{3}\langle \Phi(f), f\rangle$

Partie 5. Etude d'une suite

Dans cette partie, indépendante des précédentes, on étudie un analogue discret de l'application Φ *étudiée précédemment*.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k u_k$$

On suppose que l'on dispose d'une fonction `Scilab` d'en-tête `function u = suite_u(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de u_n.

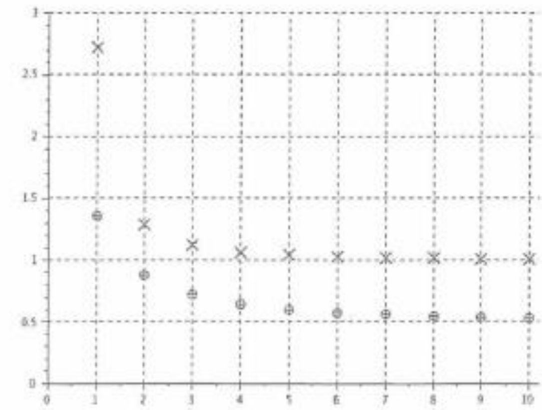
38. En déduire une fonction `Scilab` d'en-tête `function v = suite_v(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de v_n.

On suppose dans les questions 39 et 40 uniquement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

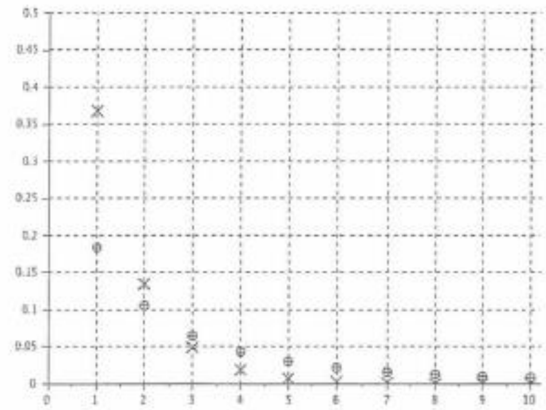
39. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Pour différentes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissantes, on représente ci-dessous, à l'aide des fonctions `suite_u` et `suite_v`, les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole '×' et ceux de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole '⊕'.

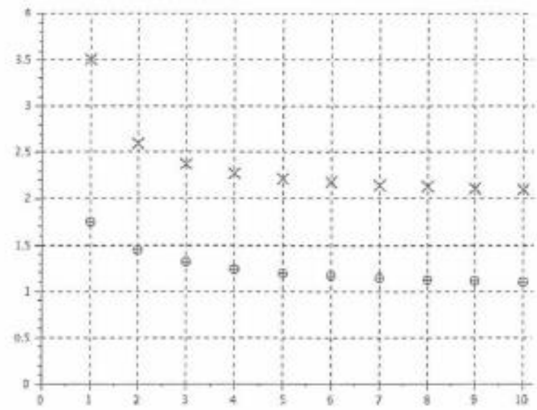
40. A la vue des graphes suivants, quelles conjectures peut-on faire sur la monotonie, la convergence et la valeur de la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?



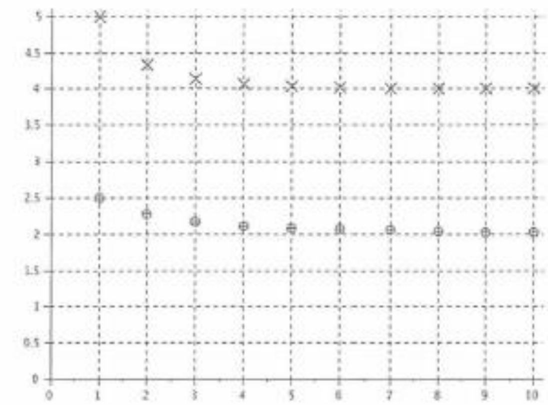
Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = e^{1/n^2}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = e^{-n}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{6n+1}{3n-1}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 4 + 5\,(0.9)^n$

41. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n \geq \frac{u_n}{2} \text{ et } v_{2n} \leq \frac{n+1}{2(2n+1)} v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)} u_{n+1}$$

42. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n+2)v_{n+1} = nv_n + u_{n+1} \text{ puis } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1})$$

43. Démontrer toutes les conjectures faites à la question 40.

On suppose dans les questions 44 à 47 uniquement que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge

44. Montrer :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} u_k - Nv_N$$

45. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge
46. Montrer ensuite que Nv_n tend vers une limite finie lorsque l'entier N tend vers $+\infty$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.
47. En déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

On considère dans la suite du problème une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

48. Justifier qu'il existe une variable aléatoire discrète Z, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, P(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} kP(Y = k)$$

On suppose dans cette question que Y admet une espérance, notée $E(Y)$.

49. Montrer : $P(Z = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{E(Y)}{n^2}$. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?