**CENTRE SCOLAIRE OZANAM**

**Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision**

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

**Concours BCE : Epreuve de Mathématiques (option Scientifique)**

**Conception EMLYON business school: 27 avril 2018**



## *Problème 1*

On définit la fonction $I$ d'une variable réelle $x$ par :

$$I(x) = \int_0^1 \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

### Partie 1. Etude d'une suite d'intégrales

On pose, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$,

$$W_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\sin(u))^k du$$

1. Calculer les intégrales $W_0$ et $W_1$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer :
$$W_k - W_{k+2} = \frac{1}{k+1} W_{k+2}$$
3. En déduire :
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\pi}{2}$$

### Partie 2. Une autre expression de $I(x)$

4. Montrer que, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge et que $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt = W_k$
*Pour cela, on pourra utiliser le changement de variable $t = \sin(u)$ après avoir justifié sa validité.*
5. Montrer que, la fonction $I$ est définie sur $\mathbb{R}$ et préciser sa parité.

6. Donner la valeur de $I(0)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Soient $t \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

7. En utilisant l'intégralité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ appliquée à la fonction $u \longmapsto e^u + e^{-u}$ entre 0 et $xt$, montrer :

$$\left| e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x$$

8. En déduire, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} W_{2k} \right| \leq \frac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!} e^x$$

9. En déduire que la série $\sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ converge et que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{1}{\pi}\, I(x)$$

## Partie 3. Equivalent de $I(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$

10. Montrer, pour tout $x$ de $\mathbb{R}^+$ :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \frac{\pi}{2}$$

11. Montrer, pour tout $v$ de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ :

$$1 \leq \frac{1}{1-v} \leq (1+v)^2$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

12. Montrer, à l'aide du changement de variable $u = 1 - t$ :

$$\int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}} du$$

13. En déduire, pour tout $x$ de $\mathbb{R}^+$:

$$\frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du \leq \int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du + \frac{e^x}{2\sqrt{2}} \int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\, du$$

14. Rappeler l'expression d'une densité de la loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$.
15. En déduire les convergences et les valeurs des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \;\text{ et }\; \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

16. A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{xu}$, montrer :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \text{ et } \int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u} du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}$$

17. En déduire :

$$I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x\sqrt{\pi}}{2x}$$

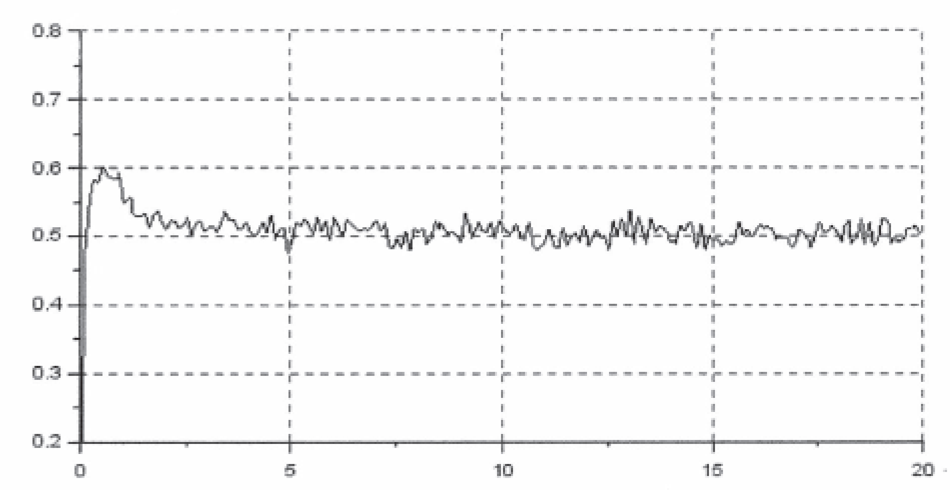
## Partie 4. Une application en probabilités

Dans cette partie, $\lambda$ désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires indépendante $X$ et $Y$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$suivant toutes les deux la loi Poisson de paramètre $\lambda$.
On s'intéresse à la probabilité de l'évènement $[X = Y]$.

18. Ecrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function r = estime(lambda)` qui, prenant en argument un réel `lambda` strictement positif, simule un grand nombre de fois les variables aléatoires $X$ et $Y$, et renvoie une estimation de $P([X = Y])$.

On rappelle que l'instruction `grand(1,1,'poi',lambda)` simule la loi de Poisson de paramètre `lambda`.

Grâce à la fonction précédente, on trace, en fonction de $\lambda$, une estimation de $\sqrt{\lambda\pi}P([X = Y])$ pour $\lambda \in ]0; 20]$ et on obtient le graphe suivant :




19. A la vue de ce graphe, proposer un équivalent de $P([X = Y])$ lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$.
20. Montrer :

$$P([X = Y)] = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}$$

21. Exprimer $P([X = Y)]$ en fonction de $\lambda$ et de la fonction $I$.
22. En déduire un équivalent de $P([X = Y)]$ lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$.

## *Problème 2*

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$, et $\mathfrak{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $E$.
On note, pour tout polynôme $P$ de $E$ :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP$$

### Partie 1. Etude d'un endomorphisme de polynômes

1. Montrer que $\varphi$ est une application linéaire.
2. Calculer $\varphi(X^n)$.
3. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.
4. Déterminer la matrice $A$ de $\varphi$ dans la base $\mathfrak{B}$. Préciser le rang de cette matrice.
5. L'endomorphisme $\varphi$ est-il injectif ? Justifier votre réponse.
6. Soit $P$ un polynôme non nul de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Montrer que $P$ admet 1 comme unique racine (dans $\mathbb{C}$), et que $P$ est de degré $n$.
7. En déduire une base $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
8. Montrer que $\varphi$ est diagonalisable

On pose, pour tout $k$ de $[\![0;n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

9. Pour tout $k$ de $[\![0\,;n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.
10. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $E$ et expliciter la matrice de $\varphi$ dans cette base.
11. Déterminer les sous-espaces propres de $\varphi$.

### Partie 2. Etude d'une suite de variables aléatoires

On considère une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$, indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace non probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
On note alors, pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*, Y_k$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des $k$ premiers tirages.
Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.
On note, pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*, Z_k$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le $k$-ième tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.
On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.

12. Déterminer la loi de $Z_2$.
13. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout $j$ de $[\![1;k]\!]$, la valeur de $\mathbf{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1}=1])$.
14. En déduire :

$$\mathbf{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n}\mathbf{E}(Y_k)$$

15. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum_{j=1}^{k} Z_j$ montrer :

$$\mathbf{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\mathbf{P}([Z_j = 1])$$

16. En déduire, pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$ :

$$\mathbf{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$$

17. Déterminer alors, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, l'espérance de $Y_k$.

On note, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, $G_k$ le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$G_k = \sum_{i=0}^{n}\mathbf{P}(\,[Y_k = i])X^i$$

18. Déterminer les polynômes de $G_0$, $G_1$ et $G_2$.
19. Montrer, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ et tout $i$ de $[\![0; n]\!]$ :

$$\mathbf{P}([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n}\mathbf{P}([Y_k = i]) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\mathbf{P}([Y_k = i-1])$$

20. Montrer, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ :

$$G_{k+1} = \frac{1}{n}X(1-X)G_k' + XG_k$$

21. En déduire, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ :

$$G_k = \varphi^k(G_0)$$

22. Pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, calculer de $G_k(1)$ et $G_k'(1)$.
23. En déduire, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ :

$$\mathbf{E}(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathbf{E}(Y_k) + 1$$

24. Retrouver alors, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, l'expression de $\mathbf{E}(Y_k)$ obtenue en question 17.

On rappelle que les polynômes $P_0, \dots, P_n$ sont définis à la question 11 par :

pour tout $j$ de $[\![0; n]\!]$, $P_j = X^j(1-X)^{n-j}$.

25. Calculer :

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j$$

26. Montrer, pour tout $j$ de $[\![0\,; n]\!]$ :

$$P_j = \sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i$$

27. En déduire, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ :

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n} \left( \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$$

28. Montrer finalement, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ et pour tout $i$ de $[\![0\,;n]\!]$ :

$$\mathbf{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k$$