CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours BCE : Epreuve de Mathématiques (option Scientifique)

Conception EDHEC : 04 mai 2021

Exercice 1

Question préliminaire : on considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et de limite ℓ et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

1. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_n \leq a_n$ puis étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ', qui vérifie $\ell' \leq \ell$.
3. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :
$$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$$
4. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et supérieur ou égal à 1.
6. Étudier les variations de la suite (u_n), puis établir que la suite (u_n) diverge et donner sa limite.
7. Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n > 1000$.

```
n=1
u=1
S=1 // S1=u0=1
while S<=1000
u=----
S=----
n=n+1
end
disp(----)
```

Recherche d'un équivalent de u_n.

8. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\frac{1}{2}$
9. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x}-x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
10. Utiliser la première question pour établir que :
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$$
11. Exprimer S_n en fonction de u_n puis en déduire un équivalent de S_n pour n au voisinage de $+\infty$.
12. Compléter le script Scilab suivant afin qu'il fasse le même travail que celui de la question 7 sans calculer S_n :

```
n=0
u=1 // u0=1
while u<=----
u=----
n=n+1
end
disp(----)
```

Exercice 2

On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite. On pose $Y=e^Z$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note F_Y la fonction de répartition de Y et Φ celle de Z.

1. Déterminer $F_Y(x)$ pour tout réel x négatif ou nul, puis exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction Φ pour tout réel x strictement positif.
2. En déduire qu'une densité f_Y de Y est donnée par :
$$f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$$

Dans la suite, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi, dite loi de Rademacher de paramètre p (avec $0 < p < 1$), et définie par :

$$P(X_n = 1) = p \text{ et } P(X_n = -1) = 1 - p$$

On considère de plus, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $T_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

3. Donner l'espérance et la variance communes aux variables X_n.
4. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T_n puis calculer $E(T_n)$ et en déduire une relation entre $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = -1)$.
5. Écrire une autre relation vérifiée par $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = -1)$, puis en déduire la loi de T_n.
6. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable T dont on précisera la loi.

Soit T_n une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables X_n.

7. Établir l'inclusion suivante :
$$\left(|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}\right) \cap \left(|T_n - T'| < \frac{1}{2}\right) \subset (|T_{n+1} - T_n| < 1)$$
8. En déduire l'inégalité :
$$P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) \leq P\left(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}\right) + P\left(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right)$$
9. Montrer, en observant les valeurs que peut prendre la variable $T_{n+1} - T_n$ que :
$$P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = 1 - p$$
10. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en probabilité ?

Dans les questions 11 et 12, on prend $p = \frac{1}{2}$.

On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $U_n = e^{n\bar{X}_n}$.

11. On rappelle que $\overline{X}_n^{\,*}$ est la variable aléatoire centrée réduite associée à $\overline{X}_n$. Exprimer $\overline{X}_n^{\,*}$ en fonction de $\overline{X}_n$.
12. Utiliser le théorème limite central pour établir que la suite $(U_n^{1/\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de même loi que Y.

Exercice 3

On considère un espace euclidien E pour lequel le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x, y\rangle$, tandis que la norme du vecteur x est notée $\|x\|$. Le vecteur nul de E est noté 0_E.

On considère aussi un endomorphisme f de E, différent de l'endomorphisme nul, et antisymétrique, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\forall\,(x,y)\in E^2, \langle f(x),y\rangle = -\langle x,f(y)\rangle$$

1. Montrer que : $\forall\, x\in E, \langle f(x),x\rangle = 0$.
2. Établir l'égalité : $\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)=E$.

On pose $s=f\circ f$.

3. Montrer que s est un endomorphisme symétrique de E et que ses valeurs propres sont toutes dans $\mathbb{R}_-$.

On note g l'application qui à tout vecteur x de $\mathrm{Im}(f)$ associe $g(x)=f(x)$ et on pose $t=g\circ g$.

4. Montrer que g est un endomorphisme antisymétrique de $\mathrm{Im}(f)$.
5. En déduire que les valeurs propres de t sont toutes dans $\mathbb{R}_-^*$.

Dans les deux questions suivantes, on considère une valeur propre λ de t et on note $E_\lambda(t)$ le sous espace propre associé à cette valeur propre.
On considère un vecteur e_1 non nul de $E_\lambda(t)$.

6. Montrer que $(e_1, g(e_1))$, est une famille d'éléments de $E_\lambda(t)$ orthogonale et libre.
7. En déduire, en considérant l'orthogonal F_2 de $\mathrm{Vect}(e_1,g(e_1))$ dans $E_\lambda(t)$, que la dimension de $E_\lambda(t)$ est paire et qu'il existe un entier naturel p non nul, ainsi que p vecteurs $e_1,e_2,\ldots,e_p$ de $E_\lambda(t)$ tels que $(e_1,g(e_1),e_2,g(e_2),\ldots,e_p,g(e_p))$ soit une base orthogonale de $E_\lambda(t)$.

Soit k un entier de $[\![1,p]\!]$.

8. Montrer que l'on a : $\|g(e_k)\|^2=-\lambda\|e_k\|^2$

On considère les vecteurs $e_k'=\dfrac{1}{\|e_k\|}e_k$ et $e_k''=\dfrac{1}{\|g(e_k)\|}g(e_k)$.

9. Établir que $g(e_k')=\sqrt{-\lambda}\,e_k''$ et $g(e_k'')=-\sqrt{-\lambda}\,e_k'$.
10. Montrer que le rang de f est pair.

On pose $r=\dfrac{1}{2}rg(f)$.

11. Déduire des questions précédentes qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et r réels $a_1,\ldots,a_r$ strictement positifs, pas nécessairement distincts, tels que la matrice M de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & -a_2 & & & (0) & & & \\ & & a_2 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & -a_r & & & \\ & & & & & a_r & 0 & & & \\ & & & (0) & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } M=\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & (0) & \\ & & 0 & -a_2 & & & \\ & & a_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & (0) & & & & 0 & -a_r \\ & & & & & a_r & 0 \end{pmatrix}$$

Problème

Partie 1. Calcul d'intégrales utiles pour la suite

Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose : $I(p,q)=\int_0^1 x^p\,(1-x)^q\,dx$.

On a, en particulier $I(p,0)=\int_0^1 x^p\,dx$ et $I(0,q)=\int_0^1 (1-x)^q\,dx$

1. Donner Les valeurs de $I(p,0)$ et $I(0,q)$.
2. Montrer que, pour tout couple (p,q) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, on a l'égalité :

$$I(p,q)=\frac{q}{p+1}I(p+1,q-1)$$

3. Montrer, par récurrence sur q, que H_q est vraie pour tout entier naturel q.
4. Donner explicitement, pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, l'expression de $I(p,q)$ en fonction de p et q, puis en déduire pour tout entier naturel n, la valeur de $I(n,n)$ en fonction de n.

Partie 2. Etude d'une suite de variables aléatoires

Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n(x)=\begin{cases}\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^n(1-x)^n & \text{si } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

5. Montrer que b_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où X_n admet b_n comme densité.

6. Reconnaître la loi de X_0.
7. Utiliser la première partie pour montrer que X_n possède une espérance et que $E(X_n) = \frac{1}{2}$.
8. Toujours en utilisant la première partie, montrer que X_n possède une variance et exprimer $V(X_n)$ en fonction de n.
9. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable certaine que l'on précisera.

Partie 3. Simulation informatique de X_n

On considère $2n+1$ variables aléatoires $U_1, U_2, \dots, U_{2n+1}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur [0,1]. On suppose que ces variables représentent respectivement les instants d'arrivée de $2n+1$ personnes $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ à leur lieu commun de rendez-vous. Pour tout k de $[\![1; 2n+1]\!]$, on note alors V_k l'instant d'arrivée de la personne arrivée la ke eau rendez-vous (cette personne n'étant pas forcément A_k). On admet que V_k est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on note G_k sa fonction de répartition.
On note F_U la fonction de répartition commune aux variables $U_1, U_2, \dots, U_{2n+1}$.

10. Rappeler l'expression de $F_U(x)$ selon que $x < 0, 0 \leq x \leq 1$ ou $x > 1$.
11. Écrire la variable V_{2n+1} en fonction de $U_1, U_2, \dots, U_{2n+1}$.
12. En déduire $G_{2n+1}(x)$ pour tout réel x.
13. Écrire la variable V_1 en fonction de $U_1, U_2, \dots, U_{2n+1}$.
14. En déduire, pour tout réel x, la probabilité $P(V_1 > x)$ puis déterminer $G_1(x)$ pour tout réel x.
15. Écrire un script `Scilab` permettant de simuler V_1 et V_{2n+1} pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.
16. Montrer que l'on a :

$$\forall\, x \in [0,1], G_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}$$

17. Déterminer une densité g_{n+1}de V_{n+1} et en déduire que V_{n+1} suit la même loi que X_n.

On considère le script `Scilab` suivant :

```
U=[8,2,9,13,23,1,5]
V=median(U)
disp(V,'V=')
```

18. Quelle est la valeur renvoyée par ce script ?
19. Écrire un script `Scilab` permettant de simuler X_n.