CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours BCE : Epreuve de Mathématiques (option Scientifique)

Conception EDHEC : 7 mai 2019

Exercice 1

Partie 1. Etude d'un exemple

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
2. En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).

En `Scilab`, la commande `r=rank(M)` renvoie dans la variable r le rang de la matrice M.

On a saisi :

```
A=[1,0,0;-2,3,-2;-1,1,0]
r1=rank(A-eye(3,3))
r2=rank(A-2*eye(3,3))
disp(r1,'r1=')
disp(r2,'r2=')
```

`Scilab` a renvoyé :

```
r1 =
     1.
r2 =
     2.
```

3. Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous espaces propres associés ?
4. Donner une base de chacun des noyaux $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$.
5. Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ et (v_2) une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de $u_1$et la première de v_1 étant nulles.
6. On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2).

Partie 2. Généralisation

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p \geq 2$, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, deux à deux distinctes. On se propose de déterminer la décomposition de chaque valeur x de E sur la somme directe $\bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f - \lambda_k Id)$ où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D.

7. En notant I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :
$$(D - \lambda_1 I_n)(D - \lambda_2 I_n) \dots (D - \lambda_p I_n) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$
8. En déduire un polynôme annulateur de f.

Pour chaque k de $[\![1, p]\!]$, on définit le polynôme :
$$L_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$$

9. En distinguant les cas $i = k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.
10. Montrer que $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.
11. Etablir alors que :
$$\forall\, P \in \mathbb{R}_{p-1}[X], P = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) L_k$$
12. En déduire que $\sum_{i=1}^{p} L_i = 1$.
13. Montrer que, pour tout x de E, $L_k(f)(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f - \lambda_k Id)$, où $L_k(f)(x)$ désigne l'image du vecteur x de E par l'endomorphisme $L_k(f)$.
14. En déduire la décomposition cherchée.
15. Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme f de la partie 1, si l'on choisit $n = 3, E = \mathbb{R}^3$ et $p = 2$.

Exercice 2

Partie 1. Question préliminaire et présentation de deux variables aléatoires X et T

On rappelle que la fonction arc tangente, notée Arctan, est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1. Rappeler l'expression, pour tout réel x, de Arctan $'(x)$.
2. Donner la valeur de $\text{Arctan}(1)$ puis montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

3. Justifier l'équivalent suivant : $\text{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$
4. Vérifier que la fonction f qui a tout réel x associe $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$ peut être considérée une densité d'une certaine variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{R}$.
5. Déterminer la fonction de répartition F de X.
6. Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire T à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$.
7. Déterminer la fonction de répartition G de T.

Partie 2. Etude d'une suite de variables aléatoires associée à X

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

8. Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.

On pose, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $Y_n = \dfrac{\pi}{n} M_n$

9. Justifier que la fonction de répartition de Y_n, notée G_n, est donnée par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, G_n(x) = \left(\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\right)^n$$

10. Déterminer, pour tout x négatif ou nul, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)$.
11. Montrer que, pour tout x strictement positif on a :

$$G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)^n$$

12. En déduire pour tout x strictement positif, la valeur de $\lim_{n\to+\infty} G_n(x)$.
13. Déduire des questions précédentes que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers T.

Exercice 3

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel non nul.
On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

Partie 1. Définition de l'adjoint u^*d'un endomorphisme u de E

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme E.
On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté u^*, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^*(y)$ vérifiant :

$$\forall\, x \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

1. Montrer que si u^* existe, alors on a, pour tout y de E :

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle\, e_i$$

2. En déduire que si u^* existe, alors u^* est unique.
3. Vérifier l'application u^* définie par l'égalité établie à la question 1 est effectivement un endomorphisme de E.
4. Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé adjoint de u, vérifiant :

$$\forall\, (x, y) \in E^2, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

Partie 2. Etude des endomorphismes normaux

On dit que u est un endomorphisme normal quand on a l'égalité :

$$u \circ u^* = u^* \circ u$$

5. Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

6. Montrer que : $\forall\, x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
7. En déduire que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^*)$.

8. Montrer que si F est un sous espace vectoriel de E stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u^*.

On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ , le sous espace propre associé.

9. Montrer que E_λ est stable par u^*.
10. Etablir que $(u^*)^* = u$ puis en déduire que $E_\lambda^{\perp}$est stable par u.

Problème

Partie 1

Dans cette partie n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X, la fonction G définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, G(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)t^k$$

1. Calculer $G(1)$.
2. Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G.
3. Etablir la relation : $V(X) = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$.

Partie 2

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

4. Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a :
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$
5. Montrer alors que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}, \ln n + \frac{1}{n} \leq u_n \leq \ln n + 1$
6. En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
7. Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie 3

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

8. On admet que si a et b sont des entiers tels que $a < b$, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` permet à `Scilab` de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme discrète sur $[\![a, b]\!]$. Compléter le script suivant pour que les lignes (5), (6), (7) et (8) permettent d'échanger les contenus des variables $A(j)$ et $A(p)$.

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
A=1:n
p=n
for k=1:n
      j=grand(1,1,'uin',1,p)
      aux=----
      A(j)=----
      A(p)=----
      p=p-1
end
disp(A)
```

On suppose dorénavant qu'après exécution du script précédent correctement complété, le vecteur A est rempli de façon aléatoire par les entiers $[\![1,n]\!]$ de telle sorte que les $n!$ permutations soient équiprobables.

On considère alors les commandes `Scilab` suivantes (exécutées à la suite du script précédent) :

```
m=A(1)
c=1
for k=2:n
     if A(k)>m then m=A(k)
                   c=k
     end
end
disp(c)
```

9. Expliquer pourquoi à la fin de la boucle `for`, la variable m contient la valeur n.
10. Quel est le contenu de la variable c affiché à la fin des commandes ?

On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `find(test)` permet de trouver à quelle(s) place(s) se trouvent les éléments d'une matrice satisfaisant au test proposé.

11. Compléter le script Scilab ci-dessous afin qu'il renvoie et affiche le contenu de la variable c étudiée plus haut :

```
c=find(---)
disp(c)
```

On admet que les contenus des variables `A(1),A(2),…,A(n)` sont des variables aléatoires notées $A_1, A_2, \dots, A_n$ et que le nombre d'affectations concernant la variable informatique c effectuées au cours du script présenté au début de la 3ème partie, y compris la première, est aussi une variable aléatoire, notée X_n.

On suppose que ces variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note G_n la fonction génératrice de X_n, E_n son espérance et V_n sa variance.

12. Donner la loi de X_1.
13. Montrer que $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
14. Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$. En déduire les lois de X_2 et X_3.
15. En considérant le système complet d'évènements $((A_n = n), (A_n < n))$, montrer que :
$$\forall\, n \geq 2, \forall\, j \in [\![2, n]\!], P(X_n = j) = \frac{1}{n}\, P(X_{n-1} = j - 1) + \frac{n-1}{n}\, P(X_{n-1} = j)$$
16. Donner la loi de X_4.
17. Vérifier que la formule obtenue à la question 14 reste valable pour $j = 1$.
18. Etablir la relation :
$$\forall\, n \geq 2, \forall\, t \in \mathbb{R}, G_n(t) = \frac{t + n - 1}{n} G_{n-1}(t) \quad (*)$$
19. En déduire que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, t \in \mathbb{R}, G_n(t) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t + j)$$
20. En dérivant la relation $(*)$, trouver une relation entre E_n et E_{n-1} puis montrer que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, E_n = u_n$$

Recherche d'un équivalent de V_n.

21. En dérivant une deuxième fois la relation $(*)$, montrer que :
$$\forall\, n \geq 2, V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$
22. En déduire pour tout entier naturel n non nul, V_n en fonction de u_n et h_n.
Montrer que $V_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.