CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours ECRICOME : Epreuve de Mathématiques
(option Economique) : 15 avril 2020

Exercice1

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Soit a un réel ; on pose :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie A. Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M, puis calculer $(M - I_3)^2$.
2. En déduire l'unique valeur propre possible de M.
3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie B. Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M, et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.
5. Démontrer que M n'est pas inversible.
6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie C. Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.
Soit $u = (1,1,1), v = (1,0,1)$ et $w = (1,1,0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.
8. Calculer $f(u), f(v)$.
9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.
10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$, que l'on notera T.
11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, x \geq 0, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt$$

Partie A. Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que :
$$\forall\, x \geq 0, f_n'(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$
2. Étudier les variations de f_n.
3. Démontrer que f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
4. En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
5. Démontrer que :
$$\forall\, t \geq 1, t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$$
6. Montrer alors que :
$$\forall\, x \geq 1, f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2}(x - 1)^2$$
7. En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
8. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.
9. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

Partie B. Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq \frac{2n+2}{2n+1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

10. Démontrer que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
11. Montrer que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \geq \frac{2n+2}{2n+1}, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$$
12. En déduire que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) \geq 0$$
13. Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
14. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $-\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0$.
15. À l'aide de l'inégalité démontrée à la question 6 de la partie A, montrer alors que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}$$
Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie C. Étude d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel n non nul.
L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, G_n(x, y) = f_n(x) \times f_n(y)$$

16. Justifier que la fonction G_n est de classe C_2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.
17. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n.
18. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1,1)$.
19. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.
20. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1,1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.

Exercice 3

Soit a un réel strictement positif.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose : $I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$

1. Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut : $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \dfrac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geq a \end{cases}$

2. Démontrer que f est bien une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

3. Donner la fonction de répartition de X.
4. Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.
5. Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut : $\frac{3a^2}{4}$

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$. On pose : $Y = \frac{a}{U^{1/3}}$

6. Déterminer $Y(\Omega)$.
7. Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.
8. Écrire une fonction en langage `Scilab` d'en-tête : `function  Y=simulX(a,m,n)` prenant en argument un réel a strictement positif et deux entiers naturels m et n non nuls, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X. Ces réels seront choisis de façon indépendante.
   À cet effet, on rappelle que si m et n sont des entiers naturels non nuls, l'instruction : `rand(m,n)` renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur $]0,1]$, ces coefficients étant choisis de façon indépendante.
9. Calculer $P([X > 2a])$.
10. Calculer $P_{[X>2a]}([X > 6a])$.

On suppose que la fonction `Scilab` de la question 8 a été programmée correctement et compilée.

11. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```
a=10
N=100000
s1=0
s2=0
X=simulX(a,1,N)
for k=1:N
    if ............. then
           s1=s1+1
           if X(k)>6*a then
                ...........
           end
    end
end
if s1>0 then
     disp(..........)
end
```

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a.
Soit n un entier naturel non nul, et $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X.

On pose : $V_n = \dfrac{2}{3n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$

12. Montrer que V_n est un estimateur sans biais pour le paramètre a.
13. Calculer son risque quadratique et vérifier que celui-ci vaut $\frac{a^2}{3n}$.

On pose : $W_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

14. Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.
15. Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \dfrac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$
16. Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance.
Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais pour le paramètre a.
17. Calculer le risque quadratique de $\lambda_n W_n$ et vérifier que celui-ci vaut :
$$\frac{a^2}{3n(3n-2)}$$

On rappelle que :

- Si A est une matrice `Scilab`, l'instruction : `A(i,:)` renvoie la $i$ème ligne de la matrice A.

- Si A est une matrice `Scilab` (éventuellement une matrice ligne), l'instruction : `sum(A)` renvoie la somme des coefficients de la matrice A.
- Si X est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X,style=-1)` représente graphiquement les coefficients de X à l'aide de croix droites.
- Si X est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X,style=-2)` représente graphiquement les coefficients de X à l'aide de croix obliques.

18. Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à m éléments :

```
function V=simulV(a,m,n)
     X=simulX(a,m,n)
     V=zeros(1,m)
     for k= ..........
         V(k)= ...............
     end
endfunction
```

Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire `simulW` permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.

19. Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```
W=simulW(...,...,...)
V=simulV(...,...,...)
plot2d(...,style=-1)
plot2d(...,style=-2)
```

On justifiera la réponse pour les deux dernières lignes.