CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours ECRICOME : Epreuve de Mathématiques (option Economique) : 16 avril 2019

Exercice 1

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie 1

1. Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de f.
3. Déterminer une base et la dimension du noyau de f.
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.

5. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
6. Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose : $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.

7. Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.
8. Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathcal{B}'$.
9. En déduire que M est inversible.
10. A l'aide de la question 1, calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.
11. A l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2.
    Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie 2

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.
On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ est V.

12. Montrer que $VT = TV$. En déduire que $g \circ f = f \circ g$.
13. Montrer que $g(e_1')$ appartient au noyau de f.
    En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e_1') = ae_1'$.
14. Montrer que $g(e_2') = ae_2'$ appartient aussi au noyau de f.
    En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e_2') = be_1' + ae_2'$
15. Montrer que $f \circ g(e_3') = g \circ f(e_3') = ae_2' + be_1'$.
    En déduire que $g(e_3') - ae_3' - be_2'$ appartient au noyau de f.
16. En déduire qu'il existe un réel c tel que : $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$
17. Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

Exercice 2

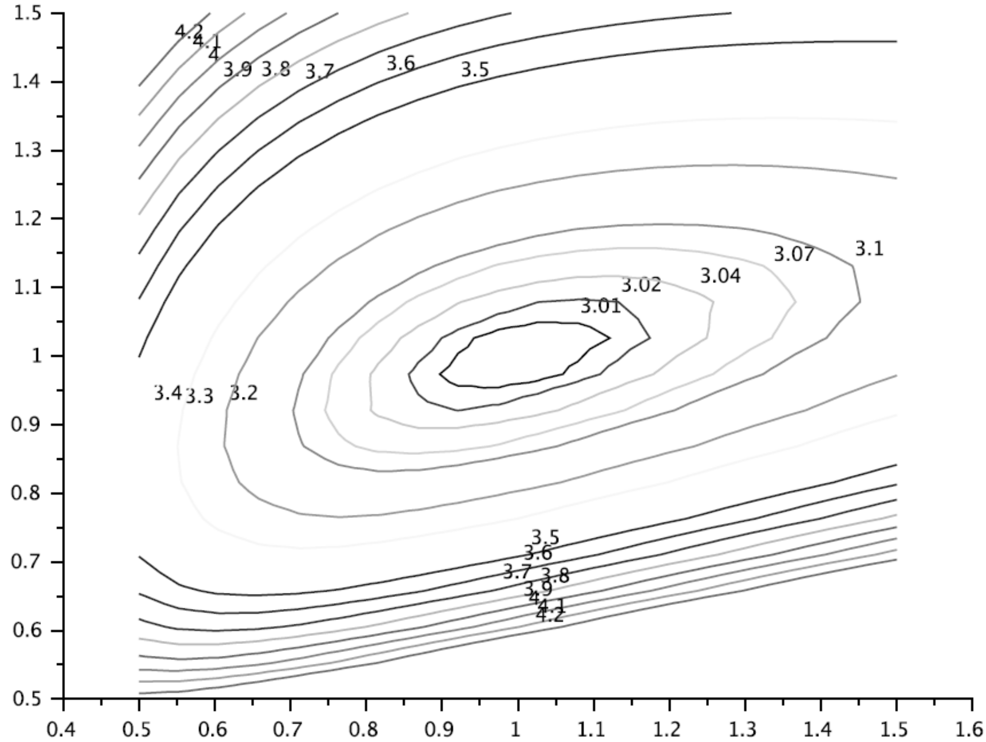
On considère la fonction f définie sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, f(x, y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$$

La première partie consiste en l'étude des extrema éventuels de la fonction f, et la deuxième partie a pour objectif l'étude d'une suite implicite définie à l'aide de la fonction f.
Ces deux parties sont indépendantes.

Partie 1

On utilise `Scilab` pour tracer des lignes de niveau de la fonction f. On obtient le graphe suivant :



1. Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f, dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.
2. Démontrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer les dérivées partielles premières de f, puis démontrer que f admet un unique point critique, noté A, que l'on déterminera.
4. Calculer les dérivées partielles secondes de f, puis démontrer que la matrice hessienne de f au point A est la matrice H définie par : $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$
5. En déduire que la fonction f admet au point A un extremum local, préciser si cet extremum est un minimum ou un maximum et donner sa valeur.

Partie 2

Pour tout entier naturel n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x > 0, h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

6. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

7. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, l'équation : $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n, et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.
8. Démontrer que :

$$\forall\, x > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

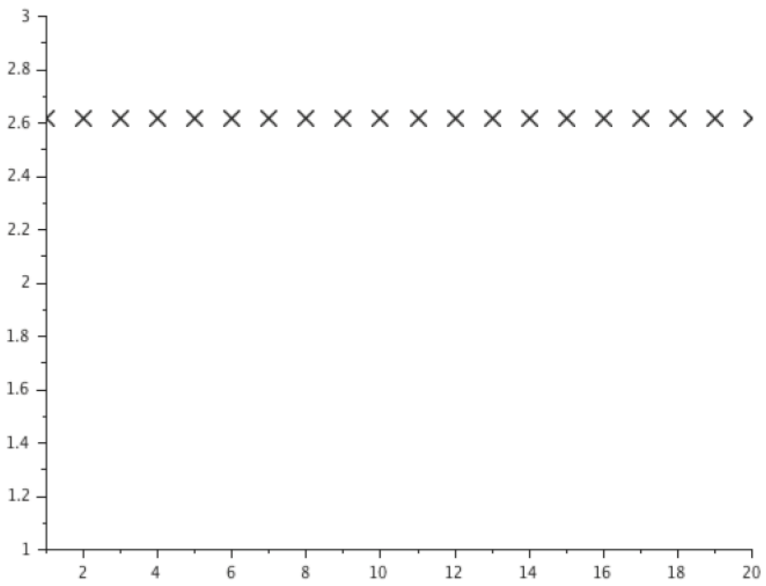
9. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_n) \geq 4$.
10. Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.
11. Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geq 1$.
12. En supposant que $\ell > 1$, démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$. En déduire une contradiction.
13. Déterminer la limite de (v_n).
14. Montrer que : $\forall\, n \geq 1, v_n \leq 3$.
15. Écrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function y=h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ en entrée.
16. Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

```
function res=v(n)
     a = 1
     b = 3
     while (b-a)>10^(-5)
          c = (a+b)/2
          if h(n,c) < 4 then ........
                    else ........
          end
     end
........
endfunction
```

À la suite de la fonction v, on écrit le code suivant :

```
X=1:20
Y=zeros(1,20)
for k=1:20
     Y(k)=v(k)^k
end
plot2d(X,Y,style=2)
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



17. Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
    Que peut-on conjecturer ?
18. Montrer que : $\forall\, n \geq 1, (v_n)^n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
19. Retrouver ainsi le résultat de la question 13.

Exercice 3

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ \dfrac{-1}{t^3} & \text{si } t \leq -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.
2. Justifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge et calculer sa valeur
3. À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a :

$$\int_{-A}^{-1} f(t)dt = \int_{1}^{A} f(u)du$$

En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$ converge et donner sa valeur.

4. Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

5. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

6. Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.
7. La variable X admet-elle une variance ?

Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

8. Donner la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.
9. Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

10. Montrer que Y admet une espérance, et la calculer.

Partie 2

Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y.
Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

11. Déterminer la loi de la variable $Z = \frac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D.
12. Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.
13. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$P(T \leq x) = \frac{1}{2}P(Y \leq x) + \frac{1}{2}P(Y \geq -x)$$

14. En déduire la fonction de répartition de T.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$ et soit V la variable aléatoire définie par : $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$

15. Rappeler la fonction de répartition de U.

16. Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variables aléatoires V et Y suivent la même loi.
17. Écrire une fonction en langage `Scilab`, d'en-tête `function a=D(n)`, qui prend un entier $n \geq 1$ en entrée, et renvoie une matrice ligne contenant n réalisations de la variable aléatoire D.

On considère le script suivant :

```
n = input('entrer n')
a=D(n)
b=rand(1,n)
c=a/sqrt(1-b)
disp(sum(c)/n)
```

18. De quelle variable aléatoire les coefficients du vecteur `c` sont-ils une simulation ? Pour `n` assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.