CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours BCE : Epreuve de Mathématiques (option Economique)
Conception HEC, ESSEC BS : 30 avril 2019

Exercice

Dans cette question, on considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et le produit matriciel $M = CL$.

1. Calculer M et M^2.
2. Déterminer le rang de M.
3. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Justifier que P est inversible et calculer le produit $P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
5. Trouver une matrice inversible Q dont la transposée ${}^tQ$ vérifie : ${}^tQ\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
6. Pour une telle matrice Q, calculer le produit PMQ.

La fonction `Scilab` suivante permet de multiplier la i-ème ligne L_i d'une matrice A par un réel sans modifier ses autres lignes, c'est-à-dire de lui appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow aL_i$ (où $a \neq 0$).

```
function B=multlig(a,i,A)
     [n,p]=size(A);
     B=A;
     for j=1:p
          B(i,j)=a*B(i,j)
     end;
endfunction
```

7. Donner le code `Scilab` de deux fonctions `addlig` (d'arguments `b,i,j,A`) et `echlig` (d'arguments `i,j,A`) permettant d'effectuer respectivement les deux autres opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice :
$$L_i \leftarrow L_i + bL_j (i \neq j) \text{ et } L_i \leftrightarrow L_j (i \neq j)$$
8. Expliquer pourquoi la fonction `multligmat` suivante retourne le même résultat `B` que la fonction `multlig`.

```
function B=multligmat(a,i,A)
     [n,p]=size(A);
     D=eye(n,n);
     D(i,i)=a;
     B=D*A;
endfunction
```

Dans les questions 9 à 13, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.
Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de sa i-ème ligne et de sa j-ème colonne, qui vaut 1.

9. Justifier l'existence d'une matrice-colonne non nulle $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et d'une matrice-ligne non nulle $L = (\ell_1 \quad \dots \quad \ell_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = CL$.
10. Calculer la matrice MC et en déduire une valeur propre de M.
11. Montrer que si le réel $\sum_{i=1}^{n} c_i \ell_i$ est différent de 0, alors la matrice M est diagonalisable.
12. À l'aide de l'égalité $M = CL$, établir l'existence de deux matrices inversibles P et Q telles que $PMQ = E_{1,1}$.
13. En déduire que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, il existe deux matrices inversibles P_i et Q_j telles que $P_i M Q_j = E_{i,j}$.

Problème

Dans ce problème, on définit et on étudie les fonctions génératrices des moments et les fonctions génératrices des cumulants de variables aléatoires discrètes ou à densité.
Les cumulants d'ordre 3 et 4 permettent de définir des paramètres d'asymétrie et d'aplatissement qui viennent compléter la description usuelle d'une loi de probabilité par son espérance (paramètre de position) et sa variance (paramètre de dispersion) ; ces cumulants sont notamment utilisés pour l'évaluation des risques financiers.

Dans tout le problème :

- on note (Ω, A, P) un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont des variables aléatoires réelles définies sur (Ω, A) ;
- sous réserve d'existence, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont respectivement notées $E(X)$ et $V(X)$;

- pour toute variable aléatoire X et pour tout réel t pour lesquels la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, on pose :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \text{ et } K_X(t) = \ln\big(M_X(t)\big)$$

(les fonctions M_X et K_X sont respectivement appelées la *fonction génératrice des moments* et la *fonction génératrice des cumulants* de X)

- lorsque, pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction K_X est de classe C^p sur un intervalle ouvert contenant l'origine, on appelle cumulant d'ordre p de X, noté $Q_p(X)$, la valeur de la dérivée p-ième de K_X en 0 :

$$Q_p(X) = K_X^{(p)}(0)$$

Partie 1. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes

Dans toute cette partie :

- on note n un entier supérieur ou égal à 2 ;
- toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes et à valeurs entières ;
- on note S une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1,1\}$ dont la loi est donnée par :

$$P([S = -1]) = P([S = +1]) = \frac{1}{2}$$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, écrire $M_X(t)$ sous la forme d'une somme et en déduire que la fonction M_X est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $M_X^{(p)}(0) = E(X^p)$.

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$ dont la fonction génératrice des moments M_Y est la même que celle de X.
On note G_X et G_Y les deux polynômes définis par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} G_X(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} P([X = k - n])x^k \\ G_Y(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} P([Y = k - n])x^k \end{cases}$$

3. Vérifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité : $G_X(e^t) = e^{nt} M_X(t)$.
4. Justifier la relation : $\forall\, t \in \mathbb{R}, G_X(e^t) = G_Y(e^t)$.
5. En déduire que la variable aléatoire Y suit la même loi que X.

Dans les questions 6 à 8, on note X_2 une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

On suppose que les variables aléatoire X_2 et S sont indépendantes et on pose $Y_2 = SX_2$.

6. Préciser l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire Y_2.
7. Calculer les probabilités $P([Y_2 = y])$ attachées au diverses valeurs possibles y de Y_2.
8. Vérifier que la variable aléatoire $X_2 - (S+1)$ suit la même loi que Y_2.

Le script `Scilab` suivant permet d'effectuer des simulations de la variable aléatoire Y_2 définie dans la question précédente.

```
(1) n=10;
(2) X=grand(n,2,'bin',2,0.5);
(3) B=grand(n,2,'bin',1,0.5);
(4) S=2*B-ones(n,2) ;
(5) Z1=[S(1:n,1).*X(1:n,1),X(1:n,1)-S(1:n,1)-ones(n,1)];
(6) Z2=[S(l:n,1).*X(1:n,1),X(1:n,2)-S(l:n,2)-ones(n,1)] ;
```

9. Que contiennent les variables `X` et `S` après l'exécution des quatre premières instructions ?
10. Expliquer pourquoi, après l'exécution des six instructions, chacun des coefficients des matrices `Z1` et `Z2` contient une simulation de la variable aléatoire Y_2.

On modifie la première ligne du script précédent en affectant à n une valeur beaucoup plus grande que 10 (par exemple 100000) et en lui adjoignant les deux instructions `(7)` et `(8)` suivantes :

```
(7) p1=length(find(Z1(1:n,1)==Z1(1:n,2)))/n;
(8) p2=length(find(Z2(1:n,1)==Z2(1:n,2)))/n;
```

11. Quelles valeurs numériques approchées la loi faible des grands nombres permet-elle de fournir pour `p1` et `p2` après l'exécution des huit lignes du nouveau script ?

Dans le langage `Scilab`, la fonction `length` fournit la « longueur » d'un vecteur ou d'une matrice et la fonction `find` calcule les positions des coefficients d'une matrice pour lesquels une propriété est vraie, comme l'illustre le script suivant :

```
--> A=[1;2;0;4] ;
--> B=[2;2;4;3] ;
--> length(A)
ans = 4.
--> length([A,B])
ans = 8.
--> find(A<B)
ans = 1. 3. // car 1<2 et 0<4,alors que 2>=2 et 4>=3
```

Dans les questions 11 à 14, on note X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$.

On suppose que les variables aléatoires X_n et S sont indépendantes et on pose $Y_n = SX_n$.

12. Justifier que la fonction MX_n est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $MX_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
13. Montrer que la fonction MY_n est donnée par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, MY_n(t) = \frac{1}{2^{n+1}}\left((1+e^{t})^n + (1+e^{-t})^n\right)$$

14. En utilisant l'égalité $(1+e^{-t})^n = e^{-nt}(1+e^{t})^n$, montrer que Y_n suit la même loi que la différence $X_n - H_n$, où H_n est une variable aléatoire indépendante de X_n dont on précisera la loi.

Partie 2. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples.

Soit X une variable aléatoire et $\mathcal{D}_x$ le domaine de définition de la fonction K_x.

15. Donner la valeur de $K_x(0)$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = aX + b$.

16. Justifier pour tout réel t pour lequel at appartient à $\mathcal{D}_X$, l'égalité : $K_Y(t) = bt + K_X(at)$.

On suppose ici que les variables aléatoires X et $-X$ suivent la même loi.

17. Que peut-on dire dans ce cas des cumulants d'ordre impair de la variable aléatoire X ?

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$ les domaines de définition respectifs des fonctions K_X et K_Y.

18. Montrer que pour tout réel t appartenant à la fois à D_X et D_Y, on a :
$$K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t)$$
19. En déduire une relation entre les cumulants des variables aléatoires X, Y et $X + Y$.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

20. Montrer que la fonction M_U est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par :
$$\forall\, \mathrm{t} \in \mathbb{R}, \mathrm{M}_U(\mathrm{t}) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$
21. Calculer la dérivée de la fonction M_U en tout point $t \neq 0$.
22. Trouver la limite du quotient $\frac{\mathrm{M}_U(\mathrm{t})-1}{t}$ lorsque t tend vers 0.
23. Montrer que la fonction M_U est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Dans cette question, on note X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

24. Exprimer K_X en fonction de M_U, où la variable aléatoire U a été définie dans les questions 20 à 23.
25. Justifier que la fonction K_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et établir l'égalité : $Q_1(X) = E(X)$.

Soit un réel $\lambda > 0$ et soit T une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ .

26. Déterminer les fonctions M_T et K_T.
27. En déduire tous les cumulants de T .

Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

28. Justifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx$$
29. Montrer que la fonction M_Z est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$
30. En déduire la valeur de tous les cumulants d'une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et d'écart-type $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $(T_n)_{n \in N^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \in N^*$, la variable aléatoire T_n suit la loi de Poisson de paramètre n.
Pour tout $n \in N^*$, on pose $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}}$

31. Justifier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \in N^*}$ vers une variable aléatoire W.
32. Déterminer la fonction K_{W_n}.
33. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} K_{W_n} = \mathrm{K}_W(\mathrm{t})$.

Partie 3. Cumulant d'ordre 4

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X telle que M_X est de classe C^4 sur un intervalle ouvert I contenant l'origine.
On admet alors que X possède des moments jusqu'à l'ordre 4 qui coïncident avec les dérivées successives de la fonction M_X en 0. Autrement dit, pour tout $k \in [\![1,4]\!]$, on a $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.
De plus, on pose : $\mu_4(X) = E((X - E(X))^4)$.

34. Justifier les égalités : $Q_1(X) = E[X]$ et $Q_2(X) = V(X)$.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose :
$$S = X_1 - X_2$$

35. Montrer que la variable aléatoire S possède un moment d'ordre 4 et établir l'égalité :
$$\mathrm{E}(\mathrm{S}^4) = 2\mu_4(\mathrm{X}) + 6(\mathrm{V}(\mathrm{X}))^2$$
36. Montrer que les fonctions M_s et K_s sont de classe C^4 sur I et que pour tout $t \in I$, on a :
$$M_s^{(4)}(t) = K_s^{(4)}(t)M_s(t) + 3K_s^{(3)}(t)M_s'(t) + 3K_s''(t)M_s''(t) + K_s'(t)M_s^{(3)}(t)$$
37. En déduire l'égalité : $E(S^4) = Q_4(S) + 3(V(S))^2$.

38. Justifier que le cumulant d'ordre 4 de X est donné par la relation :

$$Q_4(X) = \mu_4(X) - 3(V(X))^2$$