**CENTRE SCOLAIRE OZANAM**

**Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision**
60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15
✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

# Concours BCE : Epreuve de Mathématiques (option Economique)
# Conception HEC, ESSEC : 28 avril 2021



Dans ce problème, on s'intéresse à un modèle, inspiré du modèle de Cori, de propagation d'un virus au sein d'une population.
La partie 1 introduit des outils théoriques permettant de définir et d'étudier ce modèle.
Les parties 2 et 3 concernent cette étude. Si l'on fait abstraction des définitions, des notations et de la question 17, la partie 3 est indépendante des parties 1 et 2.

## Partie 1. Lois composées

On considère :

- un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $J$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^+$;
- une variable aléatoire $Y$ sur cet espace à valeurs dans $J$.
- une famille $(X_t)_{t\in J}$ de variables aléatoires sur cet espace à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes de $Y$ telles que pour tout $t \in J$,
$$X_t \text{ suit la loi } \mu(t)$$
$\mu(t)$ désignant une loi de probabilité de paramètre $t$.

On définit la variable aléatoire $Z$ sur cet espace par :
$$\forall\, \omega \in \Omega, \text{si } Y(\omega) = t \text{ alors } Z(\omega) = X_t(\omega)$$
et on dit que $Z$ suit la loi $\mu(Y)$.
On considère dans cette partie une telle variable $Z$ qui suit la loi $\mu(Y)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit aussi la fonction $f_k$ de $J$ dans $[0,1]$ par :
$$f_k(t) = \mathbb{P}([X_t = k])$$

***Un exemple avec* `Scilab`.**

On considère le script Scilab suivant :

```
function r=X(t)
r=:1
while rand()> ...
```

```
r= ...
end
endfunction
Y=rand()
Z= ...
disp(Z)
```

1. En considérant les notations précédentes avec $J = ]0,1[$ et en notant $Y$ la variable aléatoire dont $Y$ est une simulation, compléter le script précédent pour que $Z$ soit une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(Y)$.

***Cas où Y est discrète.***

On suppose dans les questions 2 à 6 que $Y$ est discrète.

2. Soit $y \in Y(\Omega)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}([Z = k] \cap [Y = y]) = f_k(y)\mathbb{P}([Y = y])$$
et si $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$,
$$\mathbb{P}_{[Y=y]}([Z = k]) = f_k(y)$$
3. En déduire que :
$$\mathbb{P}([Z = k]) = E\big(f_k(Y)\big) \qquad (1)$$

***Un exemple où $J = \mathbb{N}^*$.***

Soit $p \in ]0,1[$.

4. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n$ suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et si la loi de $Y$ est définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y = n]) = np^2(1-p)^{n-1}$, montrer que $Z$ suit la loi géométrique de paramètre $p$.

On suppose que pour tout $t \in J$, $E(X_t)$ existe. On note $g(t)$ cette espérance et on suppose que $E(g(Y))$ existe.

5. Montrer que :
$$E\big(g(Y)\big) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} k f_k(y)\, \mathbb{P}([Y = y]) \right)$$
6. En admettant que l'on peut inverser l'ordre des sommes, montrer que $E(Z)$ existe et que :
$$E(Z) = E\big(g(Y)\big) \qquad (2)$$

On admet que les résultats établis dans les questions 1 à 5, en particulier (1) et (2), sont encore vrais lorsque $Y$ n'est plus discrète.

***Un premier exemple.***

On suppose que $J = ]0,1[$, que la loi de $X_t$ est la loi géométrique de paramètre $t$ et que $Y$ suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

7. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z = k]) = \frac{1}{k(k+1)}$. La variable aléatoire $Z$ admet-elle une espérance ?
8. Que vaut $E(X_t)$ en fonction de $t$ ? Si l'on note $g$ cette fonction de $t$, que peut-on dire de $E\big(g(Y)\big)$ ?

**Un deuxième exemple**.

On suppose que $J = [0, +\infty[$, que la loi de $X_t$ est la loi de Poisson de paramètre $t$ et que $Y$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Par suite, $Z$ suit la loi $\mathcal{P}(Y)$.

Par convention, la loi de Poisson de paramètre 0 est la loi de la variable aléatoire nulle.

9. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$
$$\mathbb{P}([Z = k]) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda e^{-(\lambda+1)t} dt = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx$$
10. En raisonnant par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx = 1$$
11. Déterminer la loi de $Z$. Reconnaître la loi de $Z + 1$.
12. En déduire $E(Z)$. Ce résultat est-il cohérent avec l'égalité (2) ?

## Partie 2. Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- Tout individu infecté par le virus est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que $(d+1)$ jours, du jour $n$ où il est infecté jusqu'au jour $(n+d)$ $(n \in \mathbb{N})$ ;
- Une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un $(d+1)$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$ qui dépend généralement de facteurs biologiques.

Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on dit que $\alpha_k$ est la contagiosité de tout individu ayant été infecté $k$ jours plus tôt.

Autrement dit, on peut considérer que $\alpha_k$, lié à la nature du virus, détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact $k$ jours après sa contamination.

Finalement, les réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont tels que, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $\alpha_k \in ]0,1[$ et on note :
$$\alpha = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k$$
ce qui signifie que $\alpha$ est la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute la période où il est infecté.

On utilise les notations et définitions de la partie 1 avec $J = \mathbb{R}^+$.

On suppose que les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n$ la variable aléatoire qui désigne le nombre moyen de contacts réalisés le jour $n$ par un individu contagieux ce jour-là.
  On suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $E(R_n)$ et on pose $r_n = E(R_n)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Z_n$ la variable aléatoire égale au nombre total d'individus qui sont infectés et donc deviennent contagieux le $n$-ième jour. Par exemple, $Z_0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n$ la variable aléatoire égale à la contagiosité globale de la population le $n$-ième jour, définie par :
$$I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k} \qquad (*)$$
- On suppose enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n$ et $R_n$ sont indépendantes et que si l'on pose $Y_n = R_n I_n$, on a :
$$Z_{n+1} \text{ suit la loi } \mathcal{P}(Y_n)$$
  où $\mathcal{P}$ désigne la loi de Poisson. Ainsi la loi de $Z_{n+1}$ ne dépend que des lois de $R_n$ et de $I_n$.

13. Donner une justification de $(*)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $E(I_n)$ existe.

14. Montrer que $E(Y_n)$ existe et en utilisant un résultat de la partie 1, montrer que $E(Z_{n+1})$ existe et vaut $r_n E(I_n)$.
15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = E(Z_n)$ existe et vérifie la relation de récurrence :
$$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k} \qquad (3)$$

**Programmation de $z_n$ avec Scilab**

On suppose que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \frac{n+2}{n+1}$.
On note $\Delta$ la matrice ligne $(\alpha_0, \dots, \alpha_d)$.

16. Ecrire une fonction `Scilab` d'entête `function r=z(Delta,n)` qui calcule $z_n$ si `Delta` représente la matrice ligne $\Delta$.

Soit $(U_n)_{n\geq 0}, (V_n)_{n\geq 0}$, deux suites d'événements tels que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$.

17. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = 1$.

On rappelle que l'on dit qu'un événement $A$ est presque sûr lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
$$A_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$$

et $B$ l'événement "la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours".

18. Montrer que $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
19. En distinguant les cas où

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0]\right) \text{ est nulle ou pas,}$$

établir que, pour tout $p \geq d$ :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p}[Z_k = 0]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0]\right)$$

puis que :

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0]\right)$$

20. En déduire que $B$ est presque sûr si et seulement si :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1$$

21. Montrer que cela équivaut aussi au fait que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers 0.
22. Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}([Z_{n+1} = 0]) = E(e^{-Y_n})$$

23. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$. En déduire que $B$ est presque sûr (on pourra montrer que pour tout $x$ réel, $e^{-x} \geq 1 - x$).

## Partie 3. Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Dans cette partie, on conserve les notations de la partie 2 et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la relation (3) et $z_0 = 1$, sous trois hypothèses différentes concernant la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout réel $x$, on identifie $x$ et la matrice carrée d'ordre 1 dont l'unique coefficient est $x$.

Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on pose :

$$a_k = \frac{\alpha_k}{\alpha}$$

On suppose, dans les questions suivantes 24 à 27, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $p \in ]0, 1[$ tels que, pour tout $n \geq N$, $r_n\alpha \leq p$ . On note $(H_1)$ cette hypothèse.

24. Que vaut $\lim\limits_{t\to1} \sum_{k=0}^{d} a_k t^{d-k}$?

En déduire qu'il existe $\theta \in ]0,1[$ tel que $\theta^{d+1} \geq \rho\left(\sum\limits_{k=0}^{d} a_k\, \theta^{d-k}\right)$

(on pourra raisonner par l'absurde).

On pose $M = \max\limits_{k\in[\![N,N+d]\!]} \dfrac{z_k}{\theta^k}$.

25. Montrer que pour tout $n \geq N, z_n \leq M\theta^n$.
26. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

On montrerait de même que s 'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $p > 1$ tels que, pour tout $n \geq N, r_n\alpha \geq \rho$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$. On note $(H_2)$ cette hypothèse.

On suppose, dans les questions 27 à 39, que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur $\frac{1}{\alpha}$. On note $(H_3)$ cette hypothèse.

On pose pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix} \text{ avec } z_{-1} = \cdots = z_{-d} = 0.$$

27. Montrer qu'il existe une matrice $A$ carrée d'ordre $d+1$, de première ligne $L_0 = (a_0 \ldots a_d)$, telle que pour tout $N \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$.
28. En déduire que, pour tout $n \geq 0, U_n = A^n U_0$ puis que $z_{n-1} = LA^n U_0$ .

Dans cette question, $d = 2$ et $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

29. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$.
30. Déterminer une base $(V_1, V_2, V_3)$ de $M_{3,1}(\mathbb{R})$, où $V_1$ est un vecteur colonne propre de $A$ pour la valeur propre 1, $V_2$ pour $-\frac{1}{2}$, $V_3$ pour $-\frac{1}{3}$, ces colonnes ayant leur premier coefficient égal à 1.
31. Déterminer $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ , tel que $U_0 = s_1V_1 + s_2V_2 + s_3V_3$ .
32. En déduire que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $s_1$.

**On revient au cas général.**

33. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k}\,\lambda^k$ et que les sous-espaces propres de $A$ sont de dimension 1.
34. Montrer que 1 est valeur propre de $A$ et déterminer le vecteur colonne propre associé $V$ dont la somme des composantes vaut $d+1$.
35. Établir que $-1 \notin \mathrm{Sp}(A)$ et que si $|\lambda| > 1$, alors $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$

On pose pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $b_k = \sum_{i=k}^{d} a_i$, On définit aussi le sous-espace vectoriel $H$ de $M_{d+1,1}(\mathbb{R})$ formé des matrices $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$ telles que $\sum_{k=0}^{d} b_k\, w_k = 0$.

36. Montrer que pour tout $W \in H, AW \in H$.
37. Déterminer l'unique réels tel que $U_0 - sV \in H$.

Nous admettons que, pour tout $W \in H, LA^nW \to 0$ quand $n \to +\infty$.

38. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} z_n = s$..

39. Sous quelle(s) hypothèse(s), parmi les trois hypothèses $(H_1)$, $(H_2)$ et $(H_3)$ faites dans cette partie, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ est-elle convergente ? Comment interpréter ce résultat ?