CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours BCE : Epreuve de Mathématiques (option Economique)
Conception HEC Paris : 30 avril 2018

Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

- On note $Id_{\mathbb{R}^n}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ et $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$.
- On pose : $f^0 = Id_{\mathbb{R}^n}$ et $\forall\, j \in \mathbb{N}, f^{j+1} = f \circ f^j$.
- On suppose que f^n est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$: $f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

Soit M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le spectre de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Préciser le rang des matrices M et M^2 respectivement.
3. Quels sont les polynômes annulateurs de M dont le degré est égal à 3 ?

Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on note F_j l'image de l'endomorphisme f^j et r_j son rang :

$$F_j = \mathrm{Im}(f^j) \text{ et } r_j = \dim(F_j).$$

Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on note g_j la restriction de f à F_j, c'est-à-dire l'application linéaire de F_j dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $\forall\, x \in F_j, g_j(x) = f(x)$.

4. Calculer r_0 et r_n.

Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

5. Déterminer le rang de g_j.
   Justifier l'égalité : $r_j - r_{j+1} = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j)$.
6. Etablir les inégalités : $n \geq r_0 - r_1 \geq r_1 - r_2 \geq \cdots \geq r_{n-1} - r_n \geq 0$.

On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini H, noté $\mathrm{Card}(H)$, *est le nombre de ses éléments.*
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $P(k)$ l'ensemble des k-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ d'entiers naturels tels que

$$\sum_{i=1}^{k} i x_i = k,\ i.e.\ P(k) = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k;\ x_1 + \ 2x_2 + \ \dots + k x_k = k\ \}.$$

On pose $p(k) = \mathrm{Card}\big(P(k)\big)$.

Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose : $x_i = \mathrm{Card}\big(\{j \in [\![0, n-1]\!], r_j - r_{j+1} = i\}\big) \qquad (*)$

7. Montrer que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un élément de $P(n)$.

Dans cette question, on suppose que n est égal à 4.

8. Déterminer (x_1, x_2, x_3, x_4) lorsque f est l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
   Trouver l'ensemble de $P(4)$ et vérifier $p(4) = 5$.
   Montrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4)$, il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $(*)$.

Pour tout couple $(\ell, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose :

$$Q(\ell, k) = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in P(k), x_1 + x_2 + \cdots + x_k \le \ell\} \text{ et } q(\ell, k) = \mathrm{Card}(Q(\ell, k)).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

9. Trouver l'ensemble $Q(1, k)$.
   Pour tout entier $\ell \ge k$, justifier l'égalité : $Q(\ell, k) = P(k)$.
10. Pour tout couple (ℓ, k) d'entiers tels que $k > \ell \ge 2$ établir la relation :

$$q(\ell, k - \ell) = \mathrm{Card}\{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in P(k), x_1 + x_2 + \cdots + x_k = \ell\}).$$

Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 2.

11. Pour tout entier $k > \ell$, montrer que l'égalité $q(\ell, k) = q(\ell - 1, k) + q(\ell, k - \ell)$.
    Que vaut $q(\ell, \ell) - q(\ell - 1, \ell)$?

La fonction `Scilab` suivante dont le script est incomplet (lignes (5) et (6)), calcule une matrice `qmatrix(n)` telle que pour chaque couple $(\ell, k) \in [\![0, n]\!]^2$, le coefficient situé à l'intersection de la ligne ℓ et de la colonne k est égale à $q(\ell, k)$.

```
(1)  function q=qmatrix(n)
(2)   q=ones(n,n)
(3)   for L=2:n
(4)       for K=2:n
(5)          if (K<L) then q(L,K)=. . . . . . ;
(6)                else if (K==L) then q(L,K)=. . . . . . ;
(7)                   else q(L,K)=q(L-1,K)+q(L,K-L);end;
(8)          end;
(9)       end;
(10)   end;
(11) endfunction
```

L'application de la fonction `qmatrix` à l'entier $n = 9$ fournit la sortie suivante :

```
⇢ qmatrix(9)
```

1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
1.	2.	2.	3.	3.	4.	4.	5.	5.
1.	2.	3.	4.	5.	7.	8.	10.	12.
1.	2.	3.	5.	6.	9.	11.	15.	18.
1.	2.	3.	5.	7.	10.	13.	18.	23.
1.	2.	3.	5.	7.	11.	14.	20.	26.
1.	2.	3.	5.	7.	11.	15.	21.	28.
1.	2.	3.	5.	7.	11.	15.	22.	29.
1.	2.	3.	5.	7.	11.	15.	22.	30.

12. Compléter les lignes (5) et (6) du script de la fonction `qmatrix`.
13. Donner un script `Scilab` permettant de calculer $p(n)$ à partir d'une valeur de n entrée au clavier.
14. Conjecturer une formule générale pour $q(2, k)$ applicable à tout entier $k \geq 1$, puis la démontrer.

Problème

Dans tout le problème :

- Toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;
- On note n un entier supérieur ou égal à 2.

L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aléatoires suivant une loi Bernoulli de même paramètre mais qui ne sont pas nécessairement indépendantes.
Les partie 2 et 3 sont dépendantes de la partie 1.

Partie 1. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

Dans cette partie on considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivant chacune la même loi Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$, c'est-à-dire : $\forall\, k \in [\![1, n]\!], P([X_k = 1]) = p$ *et* $P([X_k = 0]) = 1 - p$.
On suppose que pour tout couple $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X_k et *X_ℓ est le même ; on note r ce coefficient. On a donc :*

$$\forall\, (k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2, \frac{\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{V(X_k)V(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = \ell \\ r \text{ si } k \neq \ell \end{cases}$$

1. Dans les cas suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} X_k$ en fonction de n et p.
   - Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
   - Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont toutes égales.

   De plus, préciser la loi de $\sum_{k=1}^{n} X_k$ dans chacun des deux cas précédents.
2. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la variance de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{k} X_i$ est donné par la formule :
$$V\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = kp(1-p)(1+(k-1)r)$$
3. En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\frac{1}{n-1}$.

On suppose dans les questions 4 à 6 que n est au moins égal à 2.

4. Montrer que r est égal à -1 si et seulement si on a : $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = p(2p-1)$.
5. Que vaut alors $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0])$?
6. En déduire que r ne peut être égal à -1 que lorsque $p = \frac{1}{2}$ et $P([X_1 + X_2 = 1]) = 1$.

On suppose dans les questions ci-dessous que n est supérieur ou égal à 3 et que :
$$P\left(\left[\sum_{k=1}^{n} X_k = 1\right]\right) = 1$$

7. Exprimer les valeurs de p et r en fonction de n.
8. Déterminer les n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$ pour lesquels :

   la probabilité $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right)$ est strictement positive et la calculer.

Partie 2. Lois bêta-binomiales

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

9. Justifier que l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$.
10. Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, établir à l'aide d'un changement de variable affine l'égalité :
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{y-1}\,(1-t)^{x-1}dt$$
11. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

Dans toute la suite du problème, on pose : $\forall\, (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

Soit x et y des réels strictement positifs.

12. A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation :

$$B(x+1,y) = \frac{x}{y} \times B(x,y+1)$$

13. En déduire l'égalité :

$$B(x,y+1) = \frac{y}{x+y} \times B(x,y)$$

Pour tout réel z, soit $((z)^{[m]})_{m\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$(z)^{[0]} = 1 \text{ et } \forall\, m \in \mathbb{N}, (z)^{[m+1]} = (z+m) \times (z)^{[m]}$$

(par exemple, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $(1)^{[m]} = m!$)

14. Etablir pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout couple (k,ℓ) d'entiers tels que $0 \leq k \leq \ell$, la relation :

$$B(x+k, y+\ell-k) = \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)$$

Soit a et b des réels strictement positifs. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose :

$$p_k = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$$

15. A l'aide de la relation obtenue dans la question 14, montrer que $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$

On dit qu'une variable aléatoire S suit la loi bêta-binomiale $\boldsymbol{B}(n;a,b)$ si $S(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et si :

$$\forall\, k \in [\![0,n]\!], P(S=k) = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$$

16. Reconnaître la loi $\boldsymbol{B}(n;1,1)$.
17. Montrer que l'espérance de variable aléatoire S qui suit la loi $\boldsymbol{B}(n;a,b)$ est égale à :

$$\frac{na}{a+b}$$

Partie 3. Un modèle possible dans le cas où $n = 2$

Soit a et b des réels strictement positifs et X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ telles que :

$$\forall (x_1,x_2) \in \{0,1\}^2, P([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2]) = \frac{B(a+x_1+x_2, b+2-x_1-x_2)}{B(a,b)}$$

18. Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la même loi Bernoulli.
19. Montrer que la variable $X_1 + X_2$ suit la loi bêta-binomiale $\boldsymbol{B}(2;a,b)$.
20. Etablir la relation :

$$P_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) = \frac{a+1}{a+b+1}$$

La fonction `Scilab` suivante dont le script est incomplet (lignes (5) et (6)), effectue une simulation des deux variables aléatoires X_1 et X_2 qu'elle place dans un vecteur ligne à deux composantes.

```
(1)  function x=randbetabin(a,b)
(2)   x=zeros(1,2);
(3)   u=(a+b)*rand();
(4)   v=(a+b+1)*rand();
(5)        if (u<a) then x(1,1)=1; if········· then x(1,2)=1;end;
(6)                 else if · · · · · · ·· · · then x(1,2)=1 ;end;
(7)        end ;
(8)  endfunction
```

21. Préciser la loi simulée par la variable `u` de la ligne (3).
22. Compléter les lignes (5) et (6).
23. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_2.

Soit (p, r) un couple de réels vérifiant $0 < p < 1$ et $0 < r < 1$.

24. Expliquer comment utiliser la fonction `randbetabin` pour simuler deux variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation linéaire est égal à r.