CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours BCE : Epreuve de Mathématiques (option Economique)

Conception EMLYON : 27 avril 2020

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0;1[$ par : $\forall\, x \in \,]0;1[, f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$

Partie 1. Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0;1[$ et que l'on a :
$$\forall\, x \in \,]0;1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2}\left(-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)\right)$$
2. Justifier : $\forall\, t \in \,]0;1[, t\ln(t) < 0$.
3. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0;1[$.
4. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
5. On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.
6. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
7. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
8. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie 2. Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

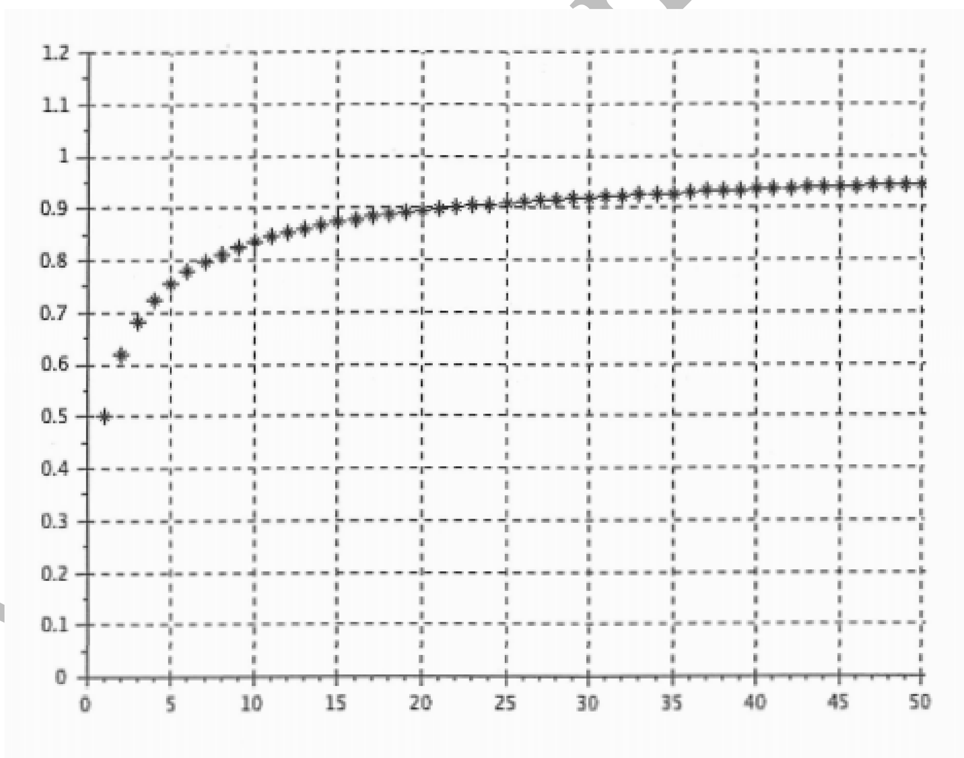
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $x \longmapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$ que l'on note u_n.
10. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0;1[$.
11. Déterminer u_1 et u_2.

12. Recopier et compléter la fonction `Scilab` suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
function u = valeur_approchee(n)
   a = 0
   b = 1
   while
        c = (a+b)/2
        if (c^n+c-1)>0 then
             ...
        else
             ...
        end
   u = ...
   end
endfunction
```

On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant.

13. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



15. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
16. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Partie 3. Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction F de classe C^2 sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$ définie par :

$$\forall\, (x,y) \in]0,+\infty[^2, F(x,y) = x^2y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$$

17. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F en tout point (x,y) de $]0,+\infty[^2$.
18. Montrer que la fonction F admet (u_3, u_3^2) comme unique point critique, où le réel u_3 est l'unique solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation (E_3) définie dans la partie 2.
19. Écrire la matrice hessienne, notée H, de la fonction F au point (u_3, u_3^2).
20. Montrer que la matrice H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant : $\lambda_1\lambda_2 = -6u_3^2 - 2$
21. La fonction F présente-t-elle des extrema locaux sur $]0,+\infty[^2$?

Exercice 2

On définit, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

Et on note : $E = \{M(a,b)\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.
3. Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E

Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$

4. Justifier que la matrice $M(0,0)$ est diagonalisable.

Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$

Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a,0)$.

5. Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.
6. En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.
7. En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$

Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0,b)$.

8. Déterminer le rang des matrices B et $B - bI_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.
9. En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.

10. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$

Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M(a,b)$.

On pose : $v_1 = (1,1,1,0), v_2 = (0,0,0,1)$ et $T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$.

11. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f)$.
12. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
13. Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$.

Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

14. Montrer que X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre λ si et seulement si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ et $z = t = 0$.

On suppose dans cette question **uniquement** que $(a,b) = (1,1)$.

15. Déterminer les valeurs propres de T. En déduire que la matrice $M(1,1)$ est diagonalisable.

On suppose dans cette question **uniquement** que $(a,b) = (1,-1)$.

16. Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1,-1)$ est-elle diagonalisable ?
17. Montrer l'équivalence :

$$M(a,b) \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow a^2 + 10ab + b^2 > 0$$

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté (Ω, A, P).

Partie 1. Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ a\dfrac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f.
Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.

3. Montrer que la variable aléatoire $bU^{-1/a}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b.
4. En déduire une fonction `Scilab` d'en-tête `function X = pareto(a,b)` qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

On considère la fonction `Scilab` ci-dessous.

5. Que contient la liste L renvoyée par la fonction `mystère` ?

```
function L = mystere(a,b)
   L = []
   for p = 2 : 6
       S = 0
        for k = 1 : 10-p
            S = S + pareto(a,b)
        end
        L = [L, S/10-p]
   end
endfunction
```

6. On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de a et b. Comment interpréter les résultats obtenus ?

```
--> mystere(2,1)
 ans =
   1.9306917 1.9411352 1.9840089 1.9977684 2.0012415

--> mystere(3,2)
 ans =
    3.1050951 3.0142956 2.9849407 2.9931656 2.9991517

--> mystere(1,4)
 ans =
    21.053151 249.58609 51.230522 137.64549 40.243918
```

7. Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$E(X) = \frac{ab}{a-1}$$

8. Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas :

$$V(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$$

Partie 2. Estimation du paramètre b

On suppose dans cette partie uniquement que $a = 3$ et on chercher à déterminer un estimateur performant de b.

Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ \dfrac{3b^3}{x^4} & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.

On définit : $Y_n = min(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$

On admet que Y_n et Z_n sont encore des variables aléatoires définies sur (Ω, A, P).

9. Calculer, pour tout x de $[b, +\infty[$, $P(\,[Y_n > x]\,)$.
10. En déduire que Y_n suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.
11. Montrer que $Y_n' = \frac{3n-1}{3n} Y_n$ est un estimateur sans biais de b. Calculer le risque quadratique de cet estimateur.
12. Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.
13. En déduire un estimateur noté Z_n' sans biais de b de la forme αZ_n où α est un réel à préciser. Calculer le risque quadratique de cet estimateur.
14. Entre Y_n' et Z_n', quel estimateur choisir ? Justifier.

Partie 3. Estimation du paramètre a

On suppose dans cette partie uniquement que $b = 1$ et on cherche à construire un intervalle de confiance pour a.

Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $W_n = \ln(X_n)$. Montrer que la variable aléatoire W_n suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de W_n.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \dfrac{\ln(X_1) + \cdots + \ln(X_n)}{n}$ et $T_n = \sqrt{n}(aM_n - 1)$.

16. Justifier que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
17. En déduire que l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n}; \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.

On admettra que $\Phi(2) \geq 0{,}975$, *où* Φ *désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.*