CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours BCE : Epreuve de Mathématiques (option Economique)

Conception EMLYON : 29 avril 2019

Exercice 1

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté (Ω, A, P).

Partie 1. Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes de densités respectives f_U et f_V et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V.
On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty; 0[$ et continues sur $[0; +\infty[$.

1. Justifier : $\forall\, t \in [0; +\infty[, 0 \leq F_U(t) f_V(t) \leq f_V(t)$.
2. En déduire que l'intégrale : $\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) dt$ converge

On admet le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t) dt = P([U \leq V])$

3. En déduire : $P([U > V]) = \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t)) f_V(t) dt$

Exemple : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.

4. Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$. En déduire :

$$P([U > V]) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Partie 2. Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre λ.
On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leq T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \dots, T_n)$.

5. Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $P([M_n > t])$.
6. En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.
   Reconnaître la loi de M_n et préciser son (ses) paramètre(s).
7. Montrer : $P([N = 1]) = P([T_1 \leq T_0]) = \frac{1}{2}$
8. Justifier : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, [N > n] = [M_n > T_0]$.
   En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $P([N > n])$ en fonction de n.
9. Montrer alors : $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, P([N = n]) = \frac{1}{n(n+1)}$
10. En déduire la valeur de $P([N = 0])$.
11. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Exercice 2

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que : $B = P^{-1}AP$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier les exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie 1. Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
   Justifier que A est inversible et diagonalisable.
2. Déterminer une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Expliciter la matrice D^{-1}.

On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Calculer Q^2 et QDQ.
5. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie 2. Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z)$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (0,1,-1)$.

6. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
7. Vérifier que 1 est valeur propre de f et que (u_1, u_2) est une base du sous-espace propre associé.
8. Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(u_3) - u_3 = u_2$.
9. Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

10. Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$.
11. Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables et calculer M_1M_2.
12. En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Partie 3. Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $N = T - I_3$.

13. Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable ?
14. Calculer N^3 puis $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.
15. En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.

16. Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.
17. Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
18. Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.
19. Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.
20. Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall\ t \in\ ]0; +\infty[, f(t) = t + \frac{1}{t}$$

Partie 1. Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
   Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $[2;+\infty[$.

On note $g\,:\;[2;+\infty[\to[1;+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1;+\infty[$.

3. Dresser le tableau de variation de g.
4. Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2;+\infty[$.
5. Soit $y\in[2;+\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t)=y$ d'inconnue $t\in]0;+\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

Partie 2. Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe C^2 sur l'ouvert $U=]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ définie par :

$$\forall\,(x,y)\in U, h(x,y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)$$

6. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en tout (x,y) de U.
7. Soit $(x,y)\in U$. Montrer : (x,y) est un point critique de $h\Leftrightarrow\begin{cases}y=x^2\\x=y^2\end{cases}$
8. En déduire que h admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées (a,b).
9. Vérifier : $\forall\,(x,y)\in U,\;\; h(x,y)=2+f(x)+f(y)+f\left(\frac{x}{y}\right)$
10. En déduire que h admet en (a,b) un minimum global sur U.

Partie 3. Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1=1\text{ et }\forall\,n\in\mathbb{N}^*, u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n^2u_n}=\frac{1}{n}f(nu_n)$$

11. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n\geq1$.
12. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction `Scilab` suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
1 function u = suite(n)
2    u = 1
3    for k = ......................
4        u = ......................
s    end
6 endfunction
```

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = u_{n+1} - u_n$.

13. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$
14. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} v_n$
15. Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$
    En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
16. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :
$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,dt$$
17. Pour tous entiers n et p tels que $2 \leq p < n$, calculer : $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :
$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,dt$$
18. En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$.
    Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2; 3]$.
19. Montrer que, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :
$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}$$
20. En déduire une fonction `Scilab` qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.