CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours BCE : Epreuve de Mathématiques (option Economique)

Conception EMLYON : 27 avril 2018

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z)$$

Enfin, on pose : $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $v = f(e_1) + e_1$

1. Calculer v.
2. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

3. Expliciter la matrice P et calculer P^{-1}.
4. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.
5. En déduire les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
6. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
7. Expliciter, sans justification, le lien entre les matrices A, A', P et P^{-1}.
8. Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathcal{B}$.
9. Montrer que $B^2 = 2B$.
10. En déduire les valeurs propres de g, ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.
11. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ BM = MA\}$.

12. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$.

13. Montrer que M n'est pas inversible. *(On pourra raisonner par l'absurde).*

On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.

14. Justifier que, pour tout réel λ, les matrices $A - \lambda I_3$ et $({}^tA) - \lambda I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
15. En déduire que les matrices B et ${}^tA$ admettent une valeur propre en commun, notée α.

Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α, et Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre α. On note : $N = X\,{}^tY$.

16. Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$.
17. En déduire que dim $(\mathcal{E}) \geq 2$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall\, x \in]0; +\infty[, f(x) = x - \ln(x)$$

Partie 1. Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Montrer que $b \in [2; 4]$. On note $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie 2. Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in [b; +\infty[$.
5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
6. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$$

7. En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

8. Écrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.
9. Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction `Scilab` suivante afin que, prenant en argument un réel epsilon strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à epsilon près.

```
1 function b = valeur_approchee(epsilon)
2    n = 0
3    while .........
4         n = n+1
5    end
6    b = suite(n)
7 endfunction
```

Partie 3. Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt$$

10. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall\, x \in\,]0;+\infty[, \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

11. En déduire les variations de Φ sur $]0;+\infty[$.
12. Montrer que : $\forall\, x \in\,]0;+\infty[,\ 0 \leq \Phi(x) \leq x$.
13. Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
14. On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.
15. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.

    On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

On donne $\Phi(2) \simeq 1{,}1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0{,}7$.

16. Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Partie 4. Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe C^2 sur l'ouvert $U =]0;+\infty[^2$ définie par :

$$\forall\, (x,y) \in]0;+\infty[^2, H(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y$$

17. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x,y) de U.
18. Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a,\ln(a))$ et $(b,\ln(b))$ où les réels a et b sont ceux introduits dans la question 2.

19. Écrire la matrice hessienne, notée M_a, de H au point $(a, \ln(a))$.
20. Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \quad = a - 1 \end{cases}$$
21. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$?
22. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$?

Exercice 3

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabi $-$lité $\frac{1}{3}$.

Partie 1. Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.
2. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, P([X = n]) = (n + 1)\frac{4}{3^{n+2}}$$

Partie 2. Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.
On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.
4. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.
5. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \boldsymbol{P}([X = n]) \text{ puis } \boldsymbol{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

6. Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.
7. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.
8. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.
9. En déduire la loi de V.

10. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
11. Que vaut $\mathbf{Cov}(U, V)$? En déduire $\mathbf{Cov}(X, U)$.

Partie 3. Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0; 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

Simulation informatique

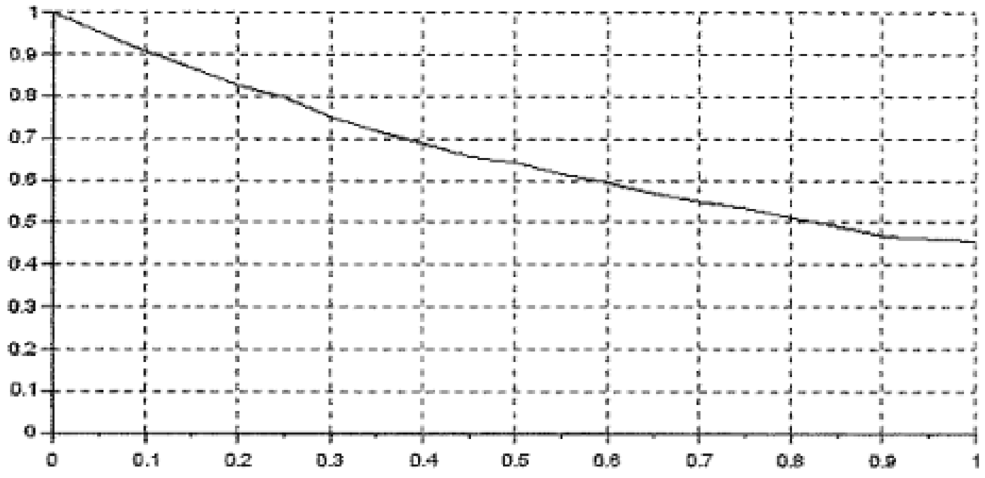
12. Écrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la variable aléatoire X.

On suppose que l'on dispose d'une `fonction simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0; 1[$, simule la variable aléatoire Y.

13. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
function r = mystere (p)
   r = 0
   N = 10^4
   for k = 1:N
       x = simule_X()
       y= simule_Y(p)
       if x <= y then
          r = r + 1/N
       end
   end
endfunction
```

On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



14. À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

Etude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

15. Reconnaître la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.
16. Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.
17. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, P([Y \geq n]) = (1-p)^n$
18. Montrer que :

$$P([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X = n])\, P([Y \geq n])$$

19. Déduire des résultats précédents :

$$P([X \leq Y]) = \frac{4}{(2+p)^2}$$

20. Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.