CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours BCE : Epreuve de Mathématiques (option Economique)
Conception EDHEC : 5 mai 2020

Exercice 1

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = ({}^tA)M + MA$$

Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

2. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
3. En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
5. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
6. Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement.
7. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
8. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

9. Écrire la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1;\ 0\}$.
10. En déduire les valeurs propres de f.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

11. Déterminer le rang de $f + Id$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où σ est strictement positif.

On rappelle que la fonction f_X qui à tout réel x associe : $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X, définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

2. Montrer que la fonction de répartition Y est la fonction, notée F_Y, définie par :
$$F_Y(x) = \begin{cases} 2F_X(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
3. En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.
4. Montrer que Y possède une espérance et que l'on a $E(Y) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

On suppose, dans les questions 5 à 7 seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ composé de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que Y.

On note S_n la variable aléatoire définie par : $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$

5. Montrer que S_n est un estimateur de σ, donner la valeur de son biais, puis proposer un estimateur sans biais de σ, que l'on notera T_n, construit de façon affine à partir de S_n.
6. Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X, puis déterminer $E(Y^2), V(Y)$ et $V(S_n)$.
7. Déterminer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de σ. En déduire que T_n est un estimateur convergent de σ.

On rappelle qu'en Scilab, si i et j désignent deux entiers naturels non nuls, la commande grand(i,j,'nor',m,s) simule dans un tableau à i lignes et j colonnes, $i \times j$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale d'espérance m et de variance s^2.

8. Compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette de simuler les variables aléatoires S_n et T_n pour des valeurs de n et σ entrées par l'utilisateur.

```
n=input('entrez la valeur de n :')
sigma=input('entrez la valeur de sigma :')
X=------ // simulations de Xl ,...,Xn
Y=------ // simulations de Yl ,...,Yn
S=------
T=------
```

Exercice 3

Soit n un entier nature non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.

On revient au cas général.

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X = k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$.

On rappelle les commandes Scilab suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :
grand(1,1,'uin',a,b) simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.
grand(1,1,'bin',n,p) simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p.
grand(1,1,'geom',p) simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

`grand(1,1,'poi',a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

4. Compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
n=input('entrez la valeur de n :')
p=input('entrez la valeur de p :')
X=------
Y=------
```

5. Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0,n]\!]$, puis montrer que
$$P(Y=0)=\frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}$$
6. Écrire, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la probabilité $P(Y=i)$ sous la forme d'une somme de $n-i+1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

Soit i et k deux entiers naturels tels que $1\leq i\leq k\leq n$.

7. Montrer l'égalité :
$$i\binom{k}{i}=k\binom{k-1}{i-1}$$
8. Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :
$$E(Y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^iq^{k-i}\right)$$
9. En déduire que :
$$E(Y)=\frac{(n+1)p}{2}$$
10. Établir que :
$$\forall\, n\geq 2, E\big(Y(Y-1)\big)=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^iq^{k-i}\right)$$
11. Montrer que l'on a :
$$\forall\, n\geq 2, E\big(Y(Y-1)\big)=\frac{(n^2-1)p^2}{3}$$
12. Vérifier que cette expression reste valable pour $n=1$.
13. Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$.

Problème

On convient que, pour tout réel x, on a $x^0=1$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

2. Calculer I_0 et I_1.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.
4. En déduire I_2.
5. Compléter le script Scilab suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable b) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('donnez une valeur pour n :')
a=1/2
b=log(2)-1/2
for k=2:n
     aux=a
     a=------
     b=------
end
disp(b)
```

6. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

7. En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.
8. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$$

9. Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n.
10. En déduire la valeur de J_1.
11. En utilisant les question 8, 9 et 10, compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('donnez une valeur pour n :')
J=log(2)
for k=1:n-1
J=------
end
I=------
disp(I)
```

12. Établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, J_n = (-1)^n\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$$

13. Utiliser les questions 6, 7 et 8 pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

14. En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

15. Utiliser la question 8 pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln 2 - \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}$

16. Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
17. Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$

18. Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$.
19. En déduire l'égalité suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1-(-1)^n)$.
20. Montrer alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2$

    Conclure.
21. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$