CENTRE SCOLAIRE OZANAM

Internat et externat pour lycéens et étudiants – Etudes encadrées et soutien scolaire – Stages intensifs de révision

60 rue Vauban 69006 LYON ☎ 04 78 52 27 99 / Fax : 04 78 52 11 15

✉ contact@ozanam-lyon.fr 💻 www.ozanamlyon.fr

Concours BCE : Epreuve de Mathématiques (option Economique)
Conception EDHEC : 8 mai 2018

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A n'est pas inversible.
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice A, puis trouver les sous espaces propres associés à ces valeurs propres.

Dans la suite de cet exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe : $f(M) = AM$

3. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et vérifier que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2.
5. En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on rappelle que la famille (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

6. Ecrire $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$ et $f(E_4)$, sous forme de combinaisons linéaires de E_1, E_2, E_3 et E_4, puis donner une base de $\text{Im}(f)$.
7. Déterminer l'image par f des vecteurs de base de $\text{Im}(f)$.
8. Donner les valeurs propres de f puis conclure que f est diagonalisable.

Généralisation : f est toujours l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que f et A possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.

9. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur colonne propre associé. Justifier que X^tX appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis montrer que c'est un vecteur propre de f. En déduire que λ est valeur propre de f.

10. Soit λ une valeur propre de f et M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vecteur propre de f associé à cette valeur propre. En considérant les colonnes C_1 et C_2 de M, montrer que λ est valeur propre de A.

Exercice 2

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir « face » vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant « face » à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant « pile » à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$ on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement « on obtient « pile » au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier « pile » et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier « face ». On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais « pile » et de donner Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais « face ».

1. Déterminer $P(X = 1)$.
2. Montrer que : $\forall\, n \geq 2, P(X = n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
3. En déduire la valeur de $P(X = 0)$.
4. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
5. Montrer que $X(X - 1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \frac{4}{3}$.
6. Justifier que Y suit la même loi que X.
7. Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X = 1] \cap [Y = j]) = P(Y = j)$
8. Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X = i] \cap [Y = 1]) = P(X = i)$.

Loi de $X + Y$

9. Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
10. Montrer que $P(X + Y = 1) = \frac{2}{3}$.
11. Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
$$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$
12. En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$P(X+Y=n)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1,1,'uin',0, m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).
On décide de coder « pile » par 1 et « face » par 0.

13. Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece=grand(1,1,'uin',---,---)
x=1
if piece==0
then lancer=rand (1,1,'uin',---,---)
     while lancer==0
     lancer=---
     x=---
     end
else
     if piece==1 then x=---
     end
end
disp(x)
```

14. Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Exercice 3

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{a}e^{-x^2/2a} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est une densité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y=\frac{X^2}{2a}$

3. Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

4. Ecrire un script `Scilab` demandant la valeur de a à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire X.
5. Vérifier que la fonction g, qui à tout réel x associe $x^2 e^{-x^2/2a}$, est paire.
6. Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z en suivant la loi normale de paramètre 0 et a.
7. En déduire que X possède une espérance et la déterminer.
8. Rappeler l'espérance de Y puis montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.
9. En déduire que la variance de X est donnée par :

$$V(X) = \frac{(4-\pi)a}{2}$$

On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X.

On note S_n la variable aléatoire définie par : $S_n = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2$

10. Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a.
11. Montrer que X^2 possède une variance et que $V(X^2) = 4a^2$.
12. Déterminer le risque quadratique $r_a(S_n)$ de S_n en tant qu'estimateur de a. En déduire que S_n est un estimateur convergent de a.

On suppose que a est inférieur ou égal à 1.

13. Ecrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire S_n et en déduire :

$$\forall\, \varepsilon > 0, P(|S_n - a| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

14. Déterminer une valeur de n pour laquelle $\left[S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour a avec un niveau de confiance au moins égal à 95 %.

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe :

$$f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\,dt$$

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1. Etude de f

1. Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.
2. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
3. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).
4. Montrer que f est impaire.
5. Etudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
6. Déterminer les réels a et b tels que :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$
7. En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :
$$f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

8. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est une intégrale convergente
9. En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2)$.
10. Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln x$
11. Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

12. Montrer que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est-à-dire :
$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f"(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + o(x^3)$$

13. Déterminer $f(0), f'(0), f"(0)$ et $f^{(3)}(0)$.
14. En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. $\left(\text{On trouve } f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}\right)$.

On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'unf',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a,b]$.

15. Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$:

```
U=grand(1,100000,'unf',0,1)
V=log(1+U.^2)
f=------
disp(f)
```

Partie 2. Etude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n \, dt$.

16. La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?
17. Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.
18. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
19. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.
20. Etablir l'encadrement suivant : $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$.
21. Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?
22. Montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt \leq \frac{u_n}{1-\ln 2}$$

23. En déduire la valeur de :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

24. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

25. En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

26. Modifier le script présenté à la question 15 pour donner une valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$